ÉDITIONS
LOISIRS
ET PÉDAGOGIE
apprendre

TRIGONOMÉTRIE, GÉOMÉTRIE VECTORIELLE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

E. W. Swokowski
J. A. Cole

Adaptation française de
Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry

Commission romande d'évaluation des moyens d'enseignement CREME

Table des matières

CHAPITRE 4 GÉOMÉTRIE VECTORIELLE 209

CHAPITRE 5 THÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE 281

ANNEXES

AVANT-PROPOS

Adaptation française de la neuvième édition de *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*, Earl W. Swokowski et Jeffery A. Cole.

Ce livre propose les fondements mathématiques de la trigonométrie, de la géométrie vectorielle ainsi que de la géométrie analytique nécessaires à l'étudiant qui entend poursuivre sa formation au niveau du calcul différentiel et intégral dans les universités, les écoles d'ingénieurs ou toute autre haute école spécialisée.

La caractéristique principale de cet ouvrage est un excellent bagage théorique associé à des applications pratiques dans les domaines des sciences, de l'ingénierie et de divers autres domaines de la vie courante.

L'un des buts principaux des auteurs est d'accroître la clarté des explications dans les démonstrations, afin de permettre à l'étudiant de comprendre plus aisément les concepts présentés, tout en respectant l'orthodoxie mathématique, qui est le fondement même du succès de ce livre. Pour ce faire, des commentaires présentés par étapes sont inclus dans les solutions des exemples.

Tout au long du texte, la calculatrice graphique joue le rôle d'outil pédagogique, et son utilisation se révèle toujours adaptée à la matière traitée. De nombreux exercices, en relation avec tous les domaines de l'activité humaine, exigent de l'étudiant qu'il estime ou calcule une valeur approchée, interprète un résultat, rédige un résumé, crée un modèle, ou encore qu'il étudie en détail ou généralise un problème ; toutes choses qui, à notre époque, doivent faire partie du cursus de l'apprenant, en particulier pour les branches scientifiques.

L'enchaînement des sujets traités au sein de cette neuvième édition résulte des suggestions faites par de nombreux enseignants et utilisateurs des éditions précédentes. Ci-dessous, une liste résumée des points forts et des caractéristiques générales du texte suit la présentation des quatre chapitres composant l'ouvrage.

CHAPITRE 1 **Fonctions trigonométriques** L'introduction à ces fonctions débute par une définition des angles ainsi que des différentes méthodes permettant de les mesurer. Les fonctions trigonométriques sont ensuite définies comme le rapport des longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Après avoir élargi le domaine des fonctions trigonométriques à des angles quelconques et à des nombres réels, leur représentation graphique est considérée afin de déterminer l'amplitude et la période. L'exposé aboutit à l'application de toutes ces notions à des problèmes concrets.

CHAPITRE 2 **Trigonométrie analytique** Il s'agit ici de la résolution d'équations impliquant des fonctions trigonométriques. Tour à tour, divers aspects tels que les identités trigonométriques ou les formules d'addition et de soustraction sont abordés et accompagnés par de très nombreux exercices algébriques et graphiques. La dernière partie contient la définition et les propriétés des fonctions trigonométriques réciproques.

CHAPITRE 3 **Applications de la trigonométrie** La première partie de ce chapitre traite du calcul des angles d'un triangle quelconque par les théorèmes du sinus et du cosinus. La partie suivante présente la forme trigonométrique des nombres complexes.

CHAPITRE 4 **Géométrie vectorielle** Les vecteurs de dimensions 2 et 3 sont introduits, ainsi que le produit scalaire, le produit vectoriel et l'équation des droites et des plans dans l'espace.

CHAPITRE 5 **Sujets de géométrie analytique** Des approches algébriques et graphiques des fonctions liées à des équations de paraboles, d'ellipses et d'hyperboles, sont présentées au moyen de nombreux graphiques. L'étude des équations paramétriques et polaires de coniques est également traitée. Comme dans la plupart des chapitres de l'ouvrage, de nombreux exemples et illustrations agrémentent le texte.

ANNEXES L'annexe I, « Représentations graphiques de fonctions de base et de courbes », est un résumé graphique des fonctions et courbes rencontrés couramment en algèbre.

L'annexe II, « Résumé de transformations de représentations graphiques », est un synopsis des transformations de base des représentations graphiques abordées dans le texte, telles que : translation, dilatation, compression et symétrie.

L'annexe III, « Représentations de fonctions trigonométriques et de leurs réciproques », contient les représentations graphiques, les ensembles de définition ainsi que les ensembles images, des six fonctions trigonométriques et de leurs fonctions réciproques.

L'annexe IV, « Algèbre et géométrie analytique », fournit quelques formules et relations en algèbre et en géométrie analytique.

CARACTÉRISTIQUES

Illustrations De brèves démonstrations de l'utilisation des définitions, lois et théorèmes sont illustrées.

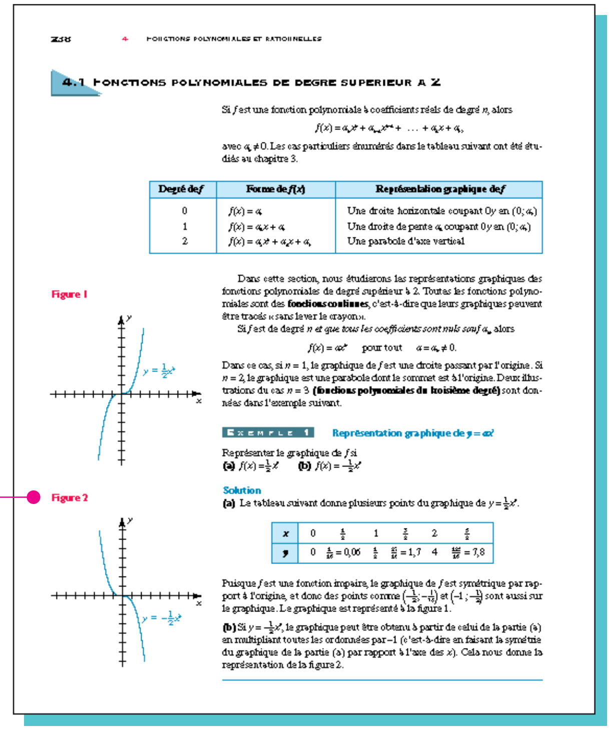
Figures Les figures facilitent l'accès à des résumés des propriétés, lois, graphiques, relations et définitions. Ces figures contiennent souvent des illustrations simples des concepts qui ont été présentés.

Exemples Munis de titres qui en facilitent la recherche, tous les exemples fournissent la résolution détaillée de problèmes semblables à ceux que l'on retrouve dans les séries d'exercices. De nombreux exemples contiennent des graphiques, des figures et des tableaux pour aider à comprendre les méthodes de résolution et les solutions.

Explications par étapes Pour aider à les suivre plus facilement, de nombreuses résolutions d'exemples contiennent des explications par étapes.

Exercices de réflexion Chaque chapitre se termine dorénavant par plusieurs exercices adaptés au travail en groupes. Ces exercices sont d'une difficulté croissante et portent tant sur des aspects théoriques que pratiques.

Corrigés Les solutions de quelques exemples sont corrigées de manière explicite, afin de rappeler aux étudiants qu'ils doivent vérifier si les solutions trouvées satisfont aux conditions du problème.



258 4 FONCTIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

4.1 FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR À 2

Si f est une fonction polynomiale à coefficients réels de degré n, alors

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$. Les cas particuliers énumérés dans le tableau suivant ont été étudiés au chapitre 3.

Degré de f	Forme de $f(x)$	Représentation graphique de f
0	$f(x) = a_0$	Une droite horizontale coupant Oy en $(0; a_0)$
1	$f(x) = a_1 x + a_0$	Une droite de pente a_1 coupant Oy en $(0; a_0)$
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	Une parabole d'axe vertical

Figure 1

Dans cette section, nous étudierons les représentations graphiques des fonctions polynomiales de degré supérieur à 2. Toutes les fonctions polynomiales sont des **fonctions continues**, c'est-à-dire que leurs graphiques peuvent être tracés « sans lever le crayon ».

Si f est de degré n *et que tous les coefficients sont nuls sauf* a_n, alors

$$f(x) = ax^n \quad \text{pour tout} \quad a = a_n \neq 0.$$

Dans ce cas, si $n = 1$, le graphique de f est une droite passant par l'origine. Si $n = 2$, le graphique est une parabole dont le sommet est à l'origine. Deux illustrations du cas $n = 3$ (**fonctions polynomiales du troisième degré**) sont données dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 1 Représentation graphique de $y = ax^3$

Représenter le graphique de f si
(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ (b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

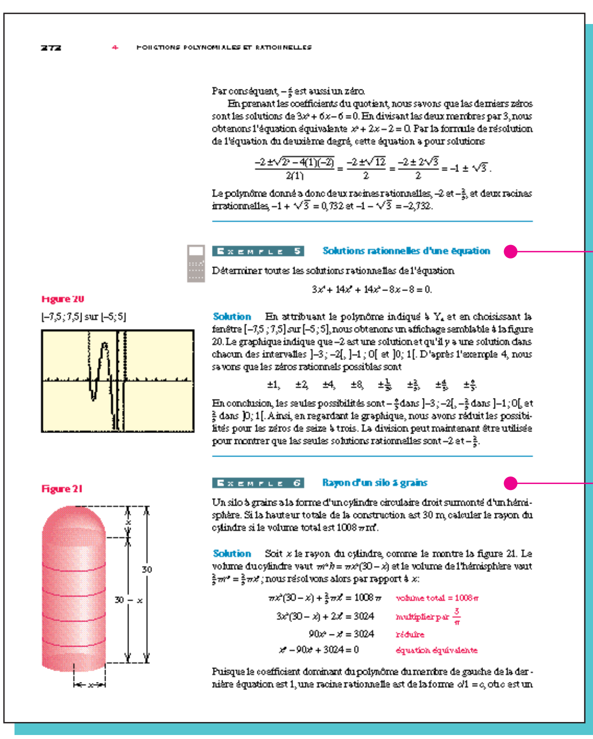
Figure 2

Solution
(a) Le tableau suivant donne plusieurs points du graphique de $y = \frac{1}{2}x^3$.

Puisque f est une fonction impaire, le graphique de f est symétrique par rapport à l'origine, et donc des points comme $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{16})$ et $(-1; -\frac{1}{2})$ sont aussi sur le graphique. Le graphique est représenté à la figure 1.

(b) Si $y = -\frac{1}{2}x^3$, le graphique peut être obtenu à partir de celui de la partie (a) en multipliant toutes les ordonnées par -1 (c'est-à-dire en faisant la symétrie du graphique de la partie (a) par rapport à l'axe des x). Cela nous donne la représentation de la figure 2.

De nombreux exemples contiennent des graphiques, des figures ou des tableaux pour mieux comprendre les méthodes de résolution et les solutions.



272 4 FONCTIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

Par conséquent, $-\frac{2}{3}$ est aussi un zéro.

En prenant les coefficients du quotient, nous savons que les derniers zéros sont les solutions de $3x^2 + 6x - 6 = 0$. En divisant les deux membres par 3, nous obtenons l'équation équivalente $x^2 + 2x - 2 = 0$. Par la formule de résolution de l'équation du deuxième degré, cette équation a pour solutions

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Le polynôme donné a donc deux racines rationnelles, -2 et $-\frac{2}{3}$, et deux racines irrationnelles, $-1 + \sqrt{3} \approx 0{,}732$ et $-1 - \sqrt{3} \approx -2{,}732$.

EXEMPLE 5 Solutions rationnelles d'une équation

Déterminer toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

Figure 20
$[-7{,}5; 7{,}5]$ sur $[-5; 5]$

Solution En attribuant le polynôme indiqué à Y_1 et en choisissant la fenêtre $[-7{,}5; 7{,}5]$ sur $[-5; 5]$, nous obtenons un affichage semblable à la figure 20. Le graphique indique que -2 est une solution et qu'il y a une solution dans chacun des intervalles $]-3; -2[$, $]-1; 0[$ et $]0; 1[$. D'après l'exemple 4, nous savons que les zéros rationnels possibles sont

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 8, \quad \pm\tfrac{1}{3}, \quad \pm\tfrac{2}{3}, \quad \pm\tfrac{4}{3}, \quad \pm\tfrac{8}{3}.$$

En conclusion, les seules possibilités sont $-\frac{8}{3}$ dans $]-3; -2[$, $-\frac{2}{3}$ dans $]-1; 0[$, et $\frac{2}{3}$ dans $]0; 1[$. Ainsi, en regardant le graphique, nous avons réduit les possibilités pour les zéros de seize à trois. La division peut maintenant être utilisée pour montrer que les seules solutions rationnelles sont -2 et $-\frac{2}{3}$.

EXEMPLE 6 Rayon d'un silo à grains

Figure 21

Un silo à grains a la forme d'un cylindre circulaire droit surmonté d'un hémisphère. Si la hauteur totale de la construction est 30 m, calculer le rayon du cylindre si le volume total est 1008π m³.

Solution Soit x le rayon du cylindre, comme le montre la figure 21. Le volume du cylindre vaut $\pi r^2 h = \pi x^2(30 - x)$ et le volume de l'hémisphère vaut $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$; nous résolvons alors par rapport à x:

$$\pi x^2(30 - x) + \tfrac{2}{3}\pi x^3 = 1008\pi \quad \text{volume total} = 1008\pi$$
$$3x^2(30 - x) + 2x^3 = 3024 \quad \text{multiplier par } \tfrac{3}{\pi}$$
$$90x^2 - x^3 = 3024 \quad \text{réduire}$$
$$x^3 - 90x^2 + 3024 = 0 \quad \text{équation équivalente}$$

Puisque le coefficient dominant du polynôme du membre de gauche de la dernière équation est 1, une racine rationnelle est de la forme $c/1 = c$, où c est un

Des exemples nécessitant l'utilisation d'une calculatrice graphique sont inclus dans le texte aux endroits appropriés. Ces exemples sont repérés par une icône et illustrés avec une figure reproduisant l'écran d'une calculatrice graphique.

Des exemples, bien structurés et classés par ordre croissant de difficulté, sont libellés de manière à faciliter leur recherche.

CHAPITRE

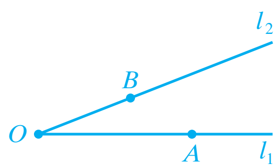
1

LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

La trigonométrie a été inventée il y a plus de 2000 ans par les Grecs qui avaient besoin de méthodes précises pour mesurer les angles et les côtés de triangles. En fait, le mot *trigonométrie* est dérivé des deux mots grecs *trigonon* (triangle) et *metria* (mesure). Ce chapitre commence par une discussion sur les angles et la façon de les mesurer. Puis nous introduirons les fonctions trigonométriques en utilisant les rapports des côtés d'un triangle rectangle. Après avoir étendu les domaines des fonctions trigonométriques à des angles quelconques et aux nombres réels, nous examinerons leurs graphiques et les techniques de représentation graphique qui utilisent les amplitudes, les périodes et les déphasages. Le chapitre se termine par une section sur des applications.

1.1 Angles

Figure 1

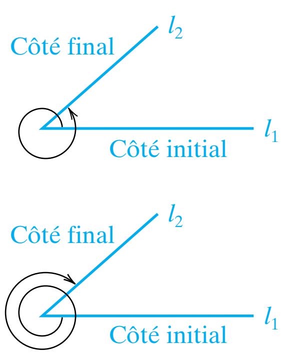


En géométrie, un **angle** est défini comme l'ensemble des points déterminés par deux rayons, ou demi-droites, l_1 et l_2, qui ont la même extrémité O. Si A et B sont des points sur l_1 et l_2, comme à la figure 1, nous faisons référence à **l'angle *AOB*** (noté $\angle AOB$). Un angle peut également être considéré comme deux segments de droites avec une extrémité commune.

En trigonométrie, nous interprétons souvent les angles comme des rotations de rayons. Partir d'un rayon fixe l_1, d'extrémité O, et le faire tourner autour de O, dans un plan, jusqu'à une position indiquée par le rayon l_2. Nous appellerons l_1 le **côté initial**, l_2 le **côté final** de l'angle et O le **sommet** de $\angle OAB$. Il n'y a aucune limite de sens ni de nombre de rotations. Nous pouvons laisser l_1 effectuer plusieurs rotations autour de O dans un sens quelconque avant d'arriver à la position l_2, comme le montre la courbe fléchée de la figure 2. Il y a donc beaucoup d'angles différents qui ont le même côté initial et le même côté final. On appelle deux angles de ce type des angles **coterminaux**. Un **angle plat** est un angle dont les côtés sont sur la même ligne droite, mais s'étendent dans des directions opposées à partir de son sommet.

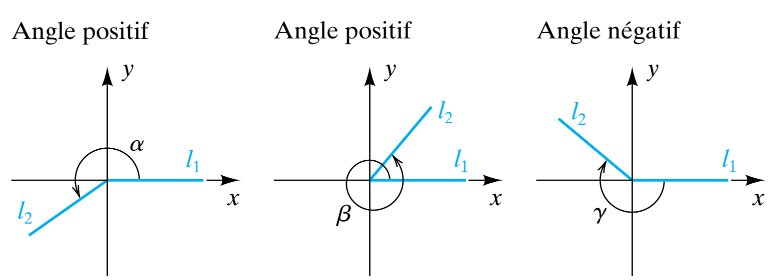
Figure 2

Angles coterminaux

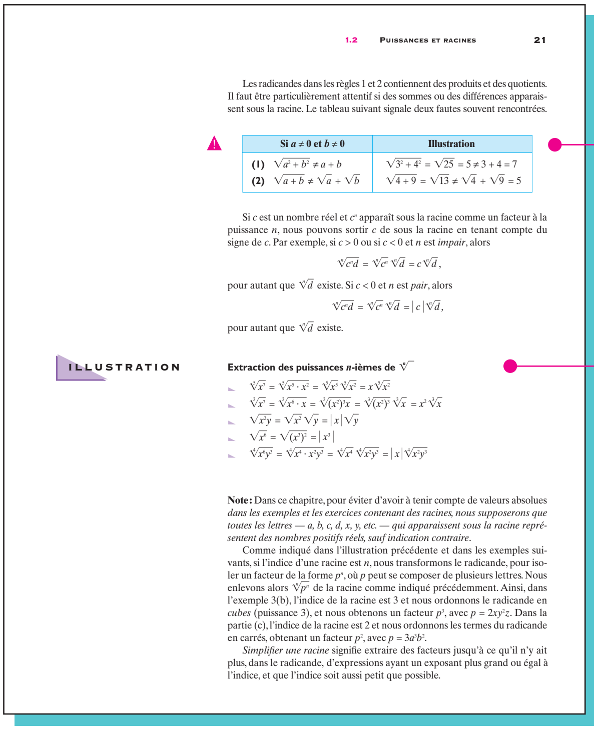


Si nous introduisons un système de coordonnées rectangulaires, la **position standard** d'un angle s'obtient en plaçant le sommet à l'origine et en faisant coïncider le côté initial l_1 avec la partie positive de l'axe des x. Si l_1 tourne *en sens inverse des aiguilles d'une montre* jusqu'à la position finale l_2, l'angle est considéré comme **positif**. Si l_1 tourne *dans le sens des aiguilles d'une montre*, l'angle est **négatif**. Nous identifions souvent les angles par des minuscules grecques: α (*alpha*), β (*bêta*), γ (*gamma*), θ (*thêta*), ϕ (*phi*), etc. La figure 3 contient des dessins de deux angles positifs, α et β, et d'un angle négatif, γ. Si le côté terminal d'un angle en position standard est dans un certain quadrant, nous dirons que l'*angle* est dans ce quadrant. A la figure 3, α est dans le quadrant III, β est dans le quadrant I, et γ est dans le quadrant II. Un angle est appelé **angle quadrantal** si son côté terminal est situé sur un axe de coordonnées.

Figure 3 Position standard d'un angle



Une des unités de mesure des angles est le **degré**. L'angle en position standard obtenu par une rotation complète dans le sens inverse des aiguilles d'une montre vaut 360 degrés, que l'on écrit 360°. Un angle de 1 degré (1°) s'obtient donc par $\frac{1}{360}$ d'un tour complet en sens inverse des aiguilles d'une montre. La figure 4 montre plusieurs angles mesurés en degrés, en position standard dans un système de coordonnées rectangulaires. Remarquer que les trois premiers sont des angles quadrantaux.



Les radicandes dans les règles 1 et 2 contiennent des produits et des quotients. Il faut être particulièrement attentif si des sommes ou des différences apparaissent sous la racine. Le tableau suivant signale deux fautes souvent rencontrées.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$	Illustration
(1) $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$	$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3+4 = 7$
(2) $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4}+\sqrt{9} = 5$

Si c est un nombre réel et c^n apparaît sous la racine comme un facteur à la puissance n, nous pouvons sortir c de sous la racine en tenant compte du signe de c. Par exemple, si $c > 0$ ou si $c < 0$ et n est *impair*, alors

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\,\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d},$$

pour autant que $\sqrt[n]{d}$ existe. Si $c < 0$ et n est *pair*, alors

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\,\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d},$$

pour autant que $\sqrt[n]{d}$ existe.

ILLUSTRATION

Extraction des puissances n-ièmes de $\sqrt[n]{}$

- $\sqrt[5]{x^7} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^5}\,\sqrt[5]{x^2} = x\sqrt[5]{x^2}$
- $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{(x^2)^3 x} = \sqrt[3]{(x^2)^3}\,\sqrt[3]{x} = x^2\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$
- $\sqrt[4]{x^6 y^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 y^3} = \sqrt[4]{x^4}\,\sqrt[4]{x^2 y^3} = |x|\sqrt[4]{x^2 y^3}$

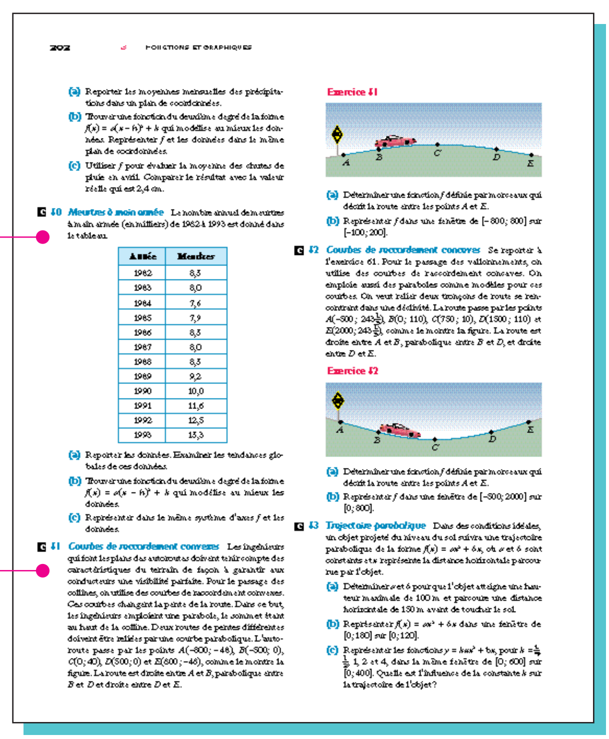
Note : Dans ce chapitre, pour éviter d'avoir à tenir compte de valeurs absolues *dans les exemples et les exercices contenant des racines, nous supposerons que toutes les lettres — a, b, c, d, x, y, etc. — qui apparaissent sous la racine représentent des nombres positifs réels, sauf indication contraire*.

Comme indiqué dans l'illustration précédente et dans les exemples suivants, si l'indice d'une racine est n, nous transformons le radicande, pour isoler un facteur de la forme p^n, où p peut se composer de plusieurs lettres. Nous enlevons alors $\sqrt[n]{p^n}$ de la racine comme indiqué précédemment. Ainsi, dans l'exemple 3(b), l'indice de la racine est 3 et nous ordonnons le radicande en *cubes* (puissance 3), et nous obtenons un facteur p^3, avec $p = 2xy^2z$. Dans la partie (c), l'indice de la racine est 2 et nous ordonnons les termes du radicande en carrés, obtenant un facteur p^2, avec $p = 3a^3b^2$.

Simplifier une racine signifie extraire des facteurs jusqu'à ce qu'il n'y ait plus, dans le radicande, d'expressions ayant un exposant plus grand ou égal à l'indice, et que l'indice soit aussi petit que possible.

Des avertissements sont insérés dans le texte afin d'attirer l'attention sur les erreurs courantes.

Des illustrations donnent de brèves démonstrations de l'utilisation de définitions, de lois ou de théorèmes.



(a) Reporter les moyennes mensuelles des précipitations dans un plan de coordonnées.

(b) Trouver une fonction du deuxième degré de la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$ qui modélise au mieux les données. Représenter f et les données dans le même plan de coordonnées.

(c) Utiliser f pour évaluer la moyenne des chutes de pluie en avril. Comparer le résultat avec la valeur réelle qui est 2,4 cm.

C 60 ***Meurtres à main armée*** Le nombre annuel de meurtres à main armée (en milliers) de 1982 à 1993 est donné dans le tableau.

Année	Meurtres
1982	8,3
1983	8,0
1984	7,6
1985	7,9
1986	8,3
1987	8,0
1988	8,3
1989	9,2
1990	10,0
1991	11,6
1992	12,5
1993	13,3

(a) Reporter les données. Examiner les tendances globales de ces données.

(b) Trouver une fonction du deuxième degré de la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$ qui modélise au mieux les données.

(c) Représenter dans le même système d'axes f et les données.

C 61 ***Courbes de raccordement convexes*** Les ingénieurs qui font les plans des autoroutes doivent tenir compte des caractéristiques du terrain de façon à garantir aux conducteurs une visibilité parfaite. Pour le passage des collines, on utilise des courbes de raccordement convexes. Ces courbes changent la pente de la route. Dans ce but, les ingénieurs emploient une parabole, le sommet étant au haut de la colline. Deux routes de pentes différentes doivent être reliées par une courbe parabolique. L'autoroute passe par les points $A(-800; -48)$, $B(-500; 0)$, $C(0; 40)$, $D(500; 0)$ et $E(800; -48)$, comme le montre la figure. La route est droite entre A et B, parabolique entre B et D et droite entre D et E.

Exercice 61

(a) Déterminer une fonction f définie par morceaux qui décrit la route entre les points A et E.

(b) Représenter f dans une fenêtre de $[-800; 800]$ sur $[-100; 200]$.

C 62 ***Courbes de raccordement concaves*** Se reporter à l'exercice 61. Pour le passage des vallonnements, on utilise des courbes de raccordement concaves. On emploie aussi des paraboles comme modèles pour ces courbes. On veut relier deux tronçons de route se rencontrant dans une déclivité. La route passe par les points $A(-500; 243\frac{1}{3})$, $B(0; 110)$, $C(750; 10)$, $D(1500; 110)$ et $E(2000; 243\frac{1}{3})$, comme le montre la figure. La route est droite entre A et B, parabolique entre B et D, et droite entre D et E.

Exercice 62

(a) Déterminer une fonction f définie par morceaux qui décrit la route entre les points A et E.

(b) Représenter f dans une fenêtre de $[-500; 2000]$ sur $[0; 800]$.

C 63 ***Trajectoire parabolique*** Dans des conditions idéales, un objet projeté du niveau du sol suivra une trajectoire parabolique de la forme $f(x) = ax^2 + bx$, où a et b sont constants et x représente la distance horizontale parcourue par l'objet.

(a) Déterminer a et b pour que l'objet atteigne une hauteur maximale de 100 m et parcoure une distance horizontale de 150 m avant de toucher le sol.

(b) Représenter $f(x) = ax^2 + bx$ dans une fenêtre de $[0; 180]$ sur $[0; 120]$.

(c) Représenter les fonctions $y = kax^2 + bx$, pour $k = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 et 4, dans la même fenêtre de $[0; 600]$ sur $[0; 400]$. Quelle est l'influence de la constante k sur la trajectoire de l'objet ?

Les séries d'exercices commencent par des exercices de drill, puis évoluent vers des problèmes plus difficiles, incluant des cas pratiques destinés à montrer comment les méthodes mathématiques sont appliquées dans des situations de la vie courante.

Des exercices nécessitant le recours à une calculatrice graphique, indiqués par un C, sont inclus dans de nombreuses sections.