

MATHÉMATIQUES BAC-CH 3

LES BROCHURES DE MATHÉMATIQUES BAC-CH

Imaginées et conçues par un professeur de gymnase de Lausanne, les brochures de mathématiques BAC-CH proposent un grand choix d'exercices avec solutions rédigées, utilisables dès la fin de la scolarité obligatoire (14 à 16 ans) et jusqu'à la maturité en Suisse romande (18 à 20 ans).

Elles peuvent être utilisées individuellement par des élèves souhaitant consolider leurs connaissances à la maison, en petit groupe par des élèves travaillant de manière autonome, ou par des établissements scolaires publics ou privés souhaitant équiper les élèves de plusieurs classes de même niveau. Elles permettent notamment aux enseignants de disposer d'exercices supplémentaires pour des séances de révision et d'encourager leurs élèves à fournir un travail régulier.

PAR ORDRE PROGRESSIF DE DIFFICULTÉ

Les brochures de mathématiques BAC-CH sont rédigées avec un souci pédagogique de clarté et d'efficacité, de manière à favoriser un travail autonome de l'élève. Numérotées de 0 à 6, elles sont conçues par ordre progressif de difficulté, en tenant compte de l'âge et du niveau de scolarité des élèves concernés.

Les brochures **BAC-CH 0 et 1** sont principalement destinées à la révision, permettant de consolider des notions de base acquises avant le début de la scolarité postobligatoire. Elles conviennent également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en début de scolarité postobligatoire.

La brochure **BAC-CH 2** est destinée aux élèves en début de scolarité postobligatoire, programme de maturité, niveau standard de mathématiques. Elle convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en milieu de scolarité postobligatoire.

Les brochures **BAC-CH 3, 4 et 5** sont destinées aux élèves en fin de scolarité postobligatoire, programme de maturité (élèves des deux dernières années), niveau standard de mathématiques. Une partie des brochures BAC-CH 4 et 5 convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, pour les deux dernières années de scolarité postobligatoire. Les trois brochures contiennent chacune des données d'examen écrit de maturité de mathématiques de niveau standard, provenant d'épreuves officielles d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande.

La brochure **BAC-CH 6** propose un choix de problèmes extraits des brochures BAC-CH 3, 4 et 5 : problèmes de révision, problèmes d'examen écrit et questions d'examen oral pour préparer l'examen de maturité.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction p.3

Conseils d'utilisation de cette brochure p.8

3.1 OUTILS TECHNIQUES I (ALGÈBRE, ÉQUATIONS, SYSTÈMES) p.11

301 Conventions d'écriture en algèbre (gestion des signes + et - et des parenthèses) p.12

302 Identités et formules de base d'algèbre p.13

303 Calculs et équations avec des fractions p.14

304 Calculs et équations avec des racines, simplification d'écriture p.15

305 Calculs et équations avec des valeurs absolues p.16

306 Calculs et équations avec des racines et des valeurs absolues p.17

307 Systèmes I : deux inconnues, deux équations de degré 1 p.18

308 Systèmes II : deux inconnues, une équation de degré 1, l'autre de degré 2 p.19

309 Systèmes III : deux inconnues, deux équations de degré 2 p.20

310 Systèmes IV : trois inconnues, équations de degré 1 ou 2 p.21

3.2 OUTILS TECHNIQUES II (VECTEURS, ANGLES, TRIGONOMÉTRIE, AIRES) p.23

311 Points et vecteurs, repères et bases, coordonnées et composantes, addition de vecteurs p.24

312 Trajets vectoriels et points particuliers (milieu, centre de gravité, points symétriques) p.25

313 Norme d'un vecteur, vecteur unitaire associé, distance entre deux points, périmètre p.26

314 Produit scalaire, vecteurs normaux (= perpendiculaires), angle de deux vecteurs p.27

315 Angles d'un triangle p.28

316 Cercle trigonométrique, équations simples et angle directeur d'un vecteur unitaire p.29

317	Quelques équations trigonométriques particulières	p.30
318	Angle directeur d'un vecteur, relation entre l'angle directeur et la pente de ce vecteur	p.31
319	Déterminant de deux vecteurs, aire algébrique d'un parallélogramme vectoriel	p.32
320	Aire d'un triangle (calcul avec un déterminant)	p.33

3.3 ÉQUATIONS DE DROITES I (FORME $d : y = mx + h$) **p.35**

321	Vecteur directeur et pente d'une droite, équation sous forme $d : y = mx + h$, dessin	p.36
322	Équation d'une droite passant par deux points connus	p.37
323	Point d'intersection de deux droites (équations sous forme $y = mx + h$)	p.38
324	Équations de droites parallèles et de droites perpendiculaires	p.39
325	Point symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée	p.40
326	Équation d'une hauteur, d'une médiatrice ou d'une médiane dans un triangle	p.41
327	Droites particulières (droites horizontales, droites verticales)	p.42
328	Angle(s) directeur(s) d'une droite, rotation autour d'un point de cette droite	p.43
329	Équations des bissectrices de deux droites (en utilisant les vecteurs unitaires)	p.44
330	Équations des bissectrices de deux droites (en utilisant les angles directeurs)	p.45

3.4 ÉQUATIONS DE DROITES II (FORME $d : ax + by + c = 0$) **p.47**

331	Vecteur normal d'une droite, équation sous forme $d : ax + by + c = 0$, dessin	p.48
332	Équation d'une droite passant par deux points connus	p.49
333	Point d'intersection de deux droites (équations sous forme $ax + by + c = 0$)	p.50
334	Équations de droites parallèles et de droites perpendiculaires	p.51
335	Point symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée	p.52
336	Équation d'une hauteur, d'une médiatrice ou d'une médiane dans un triangle	p.53
337	Droites particulières (droites horizontales, droites verticales)	p.54
338	Distance d'un point à une droite, distance entre deux droites parallèles	p.55
339	Équations des bissectrices de deux droites (en utilisant l'équidistance aux côtés)	p.56
340	Angle(s) entre deux droites	p.57

3.5 ÉQUATIONS DE DROITES III (FORMES VECTORIELLES / PARAMÉTRIQUES) p.59

- 341** Vecteur directeur d'une droite, équation vectorielle (ou paramétrique) d'une droite p.60
- 342** Point d'intersection de deux droites (équations sous forme vectorielle / paramétrique) p.61
- 343** Vecteur directeur unitaire d'une droite, équation vectorielle unitaire d'une droite p.62
- 344** Équation vectorielle unitaire d'une droite, trajet vectoriel et déplacement d'un point p.63
- 345** Trajets vectoriels 1 et 2 : déplacements de quelques cm d'un point à un autre p.64
- 346** Trajets vectoriels 3 et 4 : déplacements dans une direction perpendiculaire p.65
- 347** Trajets vectoriels 5 et 6 : parcours répété plusieurs fois de manière identique p.66
- 348** Trajets vectoriels 7 et 8 : déplacements avec obstacles verticaux ou horizontaux p.67
- 349** Trajets vectoriels 9 et 10 : déplacements avec changements de direction (rotations) p.68
- 350** Trajets vectoriels 11 et 12 : déplacements avec changements répétés de direction p.69

3.6 ÉQUATIONS DE CERCLES ET DE TANGENTES p.71

- 351** Équation du cercle (forme canonique, centre et rayon, forme développée) p.72
- 352** Intersection d'un cercle et d'une droite, intersection de deux cercles p.73
- 353** Cercle circonscrit d'un triangle p.74
- 354** Cercle inscrit d'un triangle p.75
- 355** Cercles exinscrits d'un triangle p.76
- 356** Tangente à un cercle en un point du cercle p.77
- 357** Tangente à un cercle dans une direction donnée (pente, angle directeur, etc) p.78
- 358** Tangentes à un cercle par un point extérieur au cercle I : poser $t : y = mx + h$ p.79
- 359** Tangentes à un cercle par un point extérieur au cercle II : cas particuliers p.80
- 360** Tangentes à un cercle par un point extérieur au cercle III : thème & variations p.81

3.7	12 DONNÉES GÉOMÉTRIQUES	p.89
	Remarques préalables (notations utilisées, précision des calculs)	p.89
DG1 et DG2	(points, droites, angles, distances)	p.90
DG3 et DG4	(points, droites, cercles, angles, distances)	p.94
DG5 et DG6	(points, droites, cercles, tangentes, angles, distances)	p.98
DG7 et DG8	(points, droites, angles, distances)	p.102
DG9 et DG10	(points, droites, cercles, angles, distances)	p.106
DG11 et DG12	(points, droites, cercles, tangentes, angles, distances)	p.110
3.8	12 PROBLÈMES D'EXAMEN ÉCRIT DE GÉOMÉTRIE	p.115
	Remerciements & références des problèmes	p.115
GE1 à GE12	12 problèmes de géométrie extraits d'épreuves écrites officielles de maturité ou de baccalauréat d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande	p.116
	AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES	

Conseils d'utilisation de cette brochure

Les brochures BAC-CH comportent de nombreux exercices de mathématiques, classés par thèmes, de manière systématique, selon les programmes standards en vigueur en Suisse romande. Ces exercices sont toujours accompagnés de leur solution rédigée de manière détaillée, ce qui favorise un travail indépendant et autonome de l'élève, qui peut s'y référer en tout temps, selon ses propres besoins, ses propres carences, ses propres difficultés et ses disponibilités personnelles.

Concrètement, cette approche pédagogique se traduit par une mise en page adaptée à cet objectif. Ainsi, les sujets mathématiques traités dans cette brochure sont, pour la plupart d'entre eux, présentés sous la forme d'une seule page, dont les caractéristiques sont brièvement commentées ci-dessous et dans la page ci-contre à droite.

Numéro de code de la fiche (ici il s'agit de la fiche 335).

Titre du sujet de mathématiques traité dans cette fiche.

Des commentaires et remarques (dans cette fiche il y en a deux), parfois accompagnés d'un petit dessin, permettent de rappeler tel ou tel détail théorique.

Série d'exercices de cette fiche.

Résolution des exercices de cette fiche.

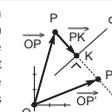
Renvoi à une page précédente de cette brochure dans laquelle on trouve des explications sur la technique à utiliser, ou même, dans certains cas, la résolution détaillée d'un calcul non rédigé dans cette fiche.

52
BAC-CH MATHÉMATIQUES

335 Point symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée

Commentaires et remarques

I. Le calcul de la position d'un point (ici noté P') symétrique d'un autre point (noté P) par rapport à une droite (notée d) se fait en quatre étapes principales.

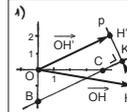


On détermine tout d'abord l'équation de la droite d (qui sert d'axe de symétrie). Puis on détermine l'équation de la droite p ⊥ à d qui passe par le point P. On calcule ensuite les coordonnées du point K d'intersection entre la droite d et la droite p. Enfin, on utilise le trajet vectoriel ci-dessous pour obtenir P'.

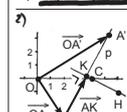
$$\vec{OP}' = \vec{OP} + 2\vec{PK}$$

II. Les données ci-dessous sont identiques à celles proposées dans la fiche 325 (en page 40), ce qui permet de comparer deux approches différentes du même objectif (déterminer la position du point symétrique d'un point connu par rapport à une droite connue).

Solution détaillée

A) 

Equation de BC: $BC: x - 2y - 4 = 0$
 Equation de p: $(p \perp BC \text{ en } H) \Rightarrow p \perp BC \Rightarrow \vec{m}_p \perp \vec{m}_{BC} \Rightarrow \vec{m}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p: 2x + 4y + c = 0$
 $\Rightarrow p: 2x + 4y + c = 0$
 H est p: $2 \cdot 6 + 4 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -11$
 $\Rightarrow p: 2x + 4y - 11 = 0$
 Coordonnées du point K (= BC ∩ p)
 $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + 4y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(5.20; 0.60)$
 Coordonnées du point H'
 Trajet vectoriel: $\vec{OH}' = \vec{OH} + 2\vec{HK}$
 $\vec{OH}' = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.40 \\ 0.20 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow H'(4.40; 0.20)$ Dessin OK

B) 

Equation de CH: $CH: x + 2y - 4 = 0$
 Equation de p: $(p \perp CH \text{ en } A) \Rightarrow p \perp CH \Rightarrow \vec{m}_p \perp \vec{m}_{CH} \Rightarrow \vec{m}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p: 2x + 4y + c = 0$
 $\Rightarrow p: 2x + 4y + c = 0$
 A est p: $2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + c = 0 \Rightarrow c = 7$
 $\Rightarrow p: 2x + 4y + 7 = 0$
 Coordonnées du point K (= CH ∩ p)
 $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(3.60; 0.20)$
 Coordonnées du point A'
 Trajet vectoriel: $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2\vec{AK}$
 $\vec{OA}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1.60 \\ 0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.20 \\ 0.40 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow A'(5.20; 0.40)$ Dessin OK

3) Equation de la droite p ⊥ à d en P
 On a $\vec{m}_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on sait que $\vec{m}_p \perp \vec{m}_d$
 $\Rightarrow \vec{m}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p: 2x - 4y + c = 0$
 P est p: $2 \cdot 2.5 + 4 \cdot 0.5 + c = 0 \Rightarrow c = -5.5$
 $\Rightarrow p: 2x - 4y - 5.5 = 0 \mid \cdot 2$
 $p: 4x - 8y - 11 = 0$
 K = d ∩ p Système $\Rightarrow K(3.60; -1.70)$
 Trajet vectoriel: $\vec{OP}' = \vec{OP} + 2\vec{PK}$
 $\vec{OP}' = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1.10 \\ -0.20 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(4.70; -3.70)$

4) Equation de la droite p ⊥ à e en Q
 $\vec{m}_e = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{m}_p = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow p: 5x - 8y + c = 0$
 Q est p: $5 \cdot 1.3 - 8 \cdot (-0.8) + c = 0$
 $c = -12.90 \Rightarrow p: 5x - 8y - 12.90 = 0$
 Coordonnées du point K et Q
 K = e ∩ p Système $\Rightarrow K(2.61; 0.02)$
 $\vec{OQ}' = \vec{OQ} + 2 \cdot \vec{QK} \Rightarrow Q'(3.92; 0.84)$

Exercices

1) On considère les trois points B(0; -2), C(4; 0) et H(6; -1). Déterminer les coordonnées du point H' symétrique du point H par rapport à la droite BC. Vérifier sur un dessin que ces coordonnées sont correctes.

2) On considère les trois points A(2; -3), C(4; 0) et H(6; -1). Déterminer les coordonnées du point A' symétrique du point A par rapport à la droite CH. Vérifier sur un dessin que ces coordonnées sont correctes.

3) On considère la droite d d'équation d: $x - 2y - 7 = 0$ et le point P(2.5; 0.5). Déterminer les coordonnées du point P' symétrique du point P par rapport à cette droite d. Vérifier sur un dessin que ces coordonnées sont correctes.

4) La droite e est donnée par son équation e: $8x + 5y - 21 = 0$. On donne également le point Q(1.3; -0.8). Déterminer les coordonnées du point Q' symétrique du point Q par rapport à cette droite e. Vérifier sur un dessin que ces coordonnées sont correctes.

VOIR LES CALCULS

332 (page 49) Exercice 6

331 (page 48) Vecteur normal et équation de la droite

312 (page 25) Trajet vectoriel (addition de vecteurs)

332 (page 49) VOIR LES CALCULS Exercice 2

307 (page 18) Système avec deux équations de degrés 1

324 (page 39) Droite perpendiculaire à une droite

3. ÉQUATIONS DE DROITES ET DE CERCLES EN GÉOMÉTRIE
 3.4 ÉQUATIONS DE DROITES II (FORME $d: ax + by + c = 0$)

53

336 Équation d'une hauteur, d'une médiatrice ou d'une médiane dans un triangle

Commentaires et remarques

- I. La définition d'une hauteur, d'une médiatrice ou d'une médiane est supposée connue.
- II. Si on connaît le vecteur normal de la droite cherchée, on connaît immédiatement le début de son équation sous forme $ax + by + c = 0$ (voir fiche 331 en page 48). Pour trouver la valeur de c , on utilise un point (par exemple un sommet dans le cas de la hauteur ou de la médiane, ou un point milieu dans le cas de la médiatrice).
- III. Parfois, on ne connaît pas le vecteur normal mais le vecteur directeur de la droite cherchée. On retrouve alors le vecteur normal en calculant le vecteur perpendiculaire au vecteur directeur (technique vue dans la fiche 314 en page 27, commentaire III).
- IV. Les données ci-dessous sont identiques à celles proposées dans la fiche 326 (en page 41), ce qui permet de comparer deux approches différentes du même objectif (déterminer l'équation d'une hauteur, d'une médiatrice ou d'une médiane dans un triangle dont on connaît les trois sommets).

Exercices

- 1) On considère le triangle donné par ses trois sommets $A(2; -3)$, $B(0; -2)$ et $C(4; 0)$. Déterminer l'équation de la hauteur d issue du sommet A ainsi que les coordonnées du point A' , pied de cette hauteur sur le côté opposé BC .
- 2) Même triangle ABC qu'à la question 1) ci-dessus. Déterminer l'équation de la médiatrice e du côté AC .
- 3) Même triangle ABC qu'à la question 1) ci-dessus. Déterminer l'équation de la médiane f issue du sommet C .
- 4) On donne le triangle de sommets $P(0.2; 2.2)$, $Q(1.3; -0.4)$ et $R(4.9; 0.5)$. Déterminer l'équation de la hauteur i issue de Q , de la médiatrice j du côté QR et de la médiane s issue du sommet R .
- 5) Triangle de sommets $I(-1.4; -1.3)$, $J(2.3; 0.6)$ et $K(-0.9; 1.7)$. Déterminer l'équation de la hauteur p issue de K , de la médiatrice q du côté IK et de la médiane r issue de I .

Solution détaillée

1) Équation de la hauteur d en A
 $\vec{BC} = (4; 2)$ joue le rôle de \vec{m}_d
 $\Rightarrow d: 4x + 2y + c = 0$
 $A \in d \Rightarrow 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + c = 0$
 $c = -2 \Rightarrow d: 4x + 2y - 2 = 0 \mid :2$
 $d: 2x + y - 1 = 0$
 Coordonnées du point A'
 Équation du côté $BC: x - 2y - 4 = 0$
 $A' = d \cap BC$ se traduit par le système
 $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(1.20; -1.40)$

2) Équation de la médiatrice e de AC
 $\vec{AC} = (2; 2)$ joue le rôle de \vec{m}_e
 $\Rightarrow e: 2x + 2y + c = 0$
 M milieu de $AC \Rightarrow M(\frac{2+4}{2}; \frac{-3+0}{2}) = (3; -1.5)$
 $M \in e \Rightarrow 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1.5) + c = 0$
 $c = -4.5 \Rightarrow e: 2x + 2y - 4.5 = 0 \mid \cdot 2$
 $e: 4x + 4y - 9 = 0$

3) Équation de la médiane f en C
 N milieu de $AB \Rightarrow N(\frac{2+0}{2}; \frac{-3-2}{2}) = (1; -2.5)$
 $\vec{CN} = (-1; -2.5)$ joue le rôle de \vec{d}_f
 $\Rightarrow \vec{m}_f = (2.5; 1)$
 $\Rightarrow f: 2.5x - y + c = 0$
 $C \in f \Rightarrow 2.5 \cdot 4 - 0 + c = 0$
 $c = -10 \Rightarrow f: 2.5x - y - 10 = 0 \mid \cdot 2$
 $f: 5x - 2y - 20 = 0$

4) Équation de la hauteur i en Q
 $\vec{PR} = (4.6; 0.9)$ joue le rôle de \vec{m}_i et on a $Q \in i$
 On obtient $i: 4.6x - 0.9y - 6.79 = 0$
 Équation de la médiatrice j de QR
 $\vec{QR} = (3.6; 0.9)$ joue le rôle de \vec{m}_j ;
 M milieu de $QR \Rightarrow M(3.1; 0.05) \in j$
 On obtient $j: 3.6x + 0.9y - 11.21 = 0$
 Équation de la médiane s en R
 N milieu de $PQ \Rightarrow N(0.75; 0.9)$
 $\vec{RN} = (-4.15; 0.2)$ joue le rôle de \vec{d}_s
 $\Rightarrow \vec{m}_s = (0.4; 1.5)$
 On obtient $s: 0.4x + 1.5y - 4.04 = 0$

5) Les calculs sont analogues à ceux effectués ci-dessus.
 Principaux résultats:
 hauteur $p: 3.7x + 1.9y + 0.1 = 0$
 M milieu de $IK \Rightarrow M(-1.15; 0.2)$
 médiatrice $q: 0.5x + 3y - 0.03 = 0$
 N milieu de $JK \Rightarrow N(0.7; 1.15)$
 $\vec{IN} = (2.4; 1)$ joue le rôle de \vec{d}_r
 $\Rightarrow \vec{m}_r = (2.4; 1)$
 médiane $r: 2.4x - 2y + 0.7 = 0$

331
 (page 48)
 Vecteur normal et équation de la droite

332
 (page 49)
 VOIR LES CALCULS Exercice 6

333
 (page 49)
 Point milieu entre deux points

3. Référence au numéro de cette brochure : ici il s'agit de la brochure BAC-CH 3.
 3.4 Référence au chapitre 3.4 de cette brochure :

ÉQUATIONS DE DROITES II
 FORME $d: ax + by + c = 0$

De même que dans la fiche précédente, des commentaires et remarques (dans cette fiche il y en a quatre) permettent de rappeler tel ou tel détail théorique.

Série d'exercices de cette fiche.

Résolution des exercices de cette fiche.

Renvoi à une page précédente de cette brochure dans laquelle on trouve des explications sur la technique à utiliser, ou même, dans certains cas, la résolution détaillée d'un calcul non rédigé dans cette fiche.

3.1

OUTILS TECHNIQUES I ALGÈBRE, ÉQUATIONS, SYSTÈMES

301	Conventions d'écriture en algèbre (gestion des signes + et - et des parenthèses)	p.12
302	Identités et formules de base d'algèbre	p.13
303	Calculs et équations avec des fractions	p.14
304	Calculs et équations avec des racines, simplification d'écriture	p.15
305	Calculs et équations avec des valeurs absolues	p.16
306	Calculs et équations avec des racines et des valeurs absolues	p.17
307	Systèmes I : deux inconnues, deux équations de degré 1	p.18
308	Systèmes II : deux inconnues, une équation de degré 1, l'autre de degré 2	p.19
309	Systèmes III : deux inconnues, deux équations de degré 2	p.20
310	Systèmes IV : trois inconnues, équations de degré 1 ou 2	p.21

301 Conventions d'écriture en algèbre (gestion des signes + et - et des parenthèses)

Commentaires et remarques

- I. On trouvera ci-dessous des calculs permettant de s'assurer que l'usage des parenthèses ne pose pas (plus) de problème à l'élève. Ainsi, il doit être bien clair pour lui que :

$$1 + (-1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

- II. De manière analogue, il convient de s'assurer que l'on a bien compris la notion de priorité des opérations par exemple dans les cas suivants, combinant des parenthèses, des puissances, et des signes + (plus), - (moins) et \cdot (fois) :

$$(-1)^2 = 1 \quad \text{alors que} \quad -1^2 = -1$$

$$3 \cdot 2 + 1 = 7 \quad (\text{et pas} = 9)$$

- III. Enfin, l'élève doit pouvoir effectuer des calculs algébriques simples et simplifier au mieux une écriture comportant des chiffres et des lettres.
- IV. En cas de difficulté technique, il est conseillé de (re)travailler avec la brochure BAC-CH 0, intitulée «*RÉVISION DES NOTIONS DE BASE*» (informations sur le site www.bac-ch.ch).

Exercices

Effectuer les calculs ci-dessous, d'abord avec une calculatrice (sans rien écrire, seul le résultat compte), puis, au contraire, en rédigeant soigneusement toutes les étapes de calcul, mais sans utiliser la calculatrice.

- 1) $1 + (-1) - 1 - (-1) + (1 - (-1))$
- 2) $-2 - 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-2) + ((-3) + (-1))$
- 3) $(-1)^2 - 3 - (-2)^2 + (1 + (-2))^2 - (-1 - (-3))^2$
- 4) $-(-3)^2 + (2 \cdot (-1))^2 - (1 - (-2))^2 \cdot (-1^2)$
- 5) $1 - (-2)^2 - (2 - (-1))^2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-3 + (-1))$

Effectuer les calculs ci-dessous (simplifier au maximum la réponse obtenue).

- 6) $x - (-2x) - 3x - (-4x) + (5x - (-6x))$
- 7) $-xy - 3x \cdot (-2y) - 4x \cdot (-5y) - ((-3x) \cdot (-4y) + (-1))$
- 8) $(-a)^2 - 3b^2 - (-3a)^2 + (-2b)^2 - (-b)^2 + 4a^2$
- 9) $-2m^2 - 3 + (-3m)^2 - 1^2 - (-2m)^2 - 2 + (-(-m)^2)$

Solution détaillée

Réponses obtenues en utilisant la calculatrice (sans rédiger)

1) 2
2) -10
3) 15
4) 2
5) -51

Ci-dessous, réponses obtenues en rédigeant toutes les étapes

$$\begin{aligned} 1) & 1 + (-1) - 1 - (-1) + (1 - (-1)) \\ & = 1 - 1 - 1 + 1 + (1 + 1) \\ & = 1 - 1 - 1 + 1 + 2 = \underline{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) & -2 - 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-2) + ((-3) + (-1)) \\ & = -2 + 2 - 6 + (-4) \\ & = -2 + 2 - 6 - 4 = \underline{-10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & (-1)^2 - 3 - (-2)^2 + (1 + (-2))^2 - (-1 - (-3))^2 \\ & = 1 - 3 - 4 + (1 + 4)^2 - (-1 + 3)^2 \\ & = 1 - 3 - 4 + 5^2 - 2^2 \\ & = 1 - 3 - 4 + 25 - 4 = \underline{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) & -(-3)^2 + (2 \cdot (-1))^2 - (1 - (-2))^2 \cdot (-1^2) \\ & = -9 + 2 \cdot 1 - (1 + 2)^2 \cdot (-1) \\ & = -9 + 2 - 3^2 \cdot (-1) \\ & = -9 + 2 - 9 \cdot (-1) \\ & = -9 + 2 + 9 = \underline{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) & 1 - (-2)^2 - (2 - (-1))^2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-3 + (-1)) \\ & = 1 - 4 - (2 + 1)^2 \cdot 4 + 3 \cdot (-3 - 1) \\ & = 1 - 4 - 3^2 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \\ & = 1 - 4 - 9 \cdot 4 - 12 \\ & = 1 - 4 - 36 - 12 = \underline{-51} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) & x - (-2x) - 3x - (-4x) + (5x - (-6x)) \\ & = x + 2x - 3x + 4x + (5x + 6x) \\ & = x + 2x - 3x + 4x + 11x \\ & = \underline{15x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) & -xy - 3x \cdot (-2y) - 4x \cdot (-5y) - ((-3x) \cdot (-4y) + (-1)) \\ & = -xy + 6xy + 20xy - (12xy - 1) \\ & = -xy + 6xy + 20xy - 12xy + 1 \\ & = \underline{13xy + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) & (-a)^2 - 3b^2 - (-3a)^2 + (-2b)^2 - (-b)^2 + 4a^2 \\ & = a^2 - 3b^2 - 9a^2 + 4b^2 - b^2 + 4a^2 \\ & = \underline{-4a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) & -2m^2 - 3 + (-3m)^2 - 1^2 - (-2m)^2 - 2 + (-(-m)^2) \\ & = -2m^2 - 3 + 9m^2 - 1 - 4m^2 - 2 + (-m^2) \\ & = -2m^2 - 3 + 9m^2 - 1 - 4m^2 - 2 - m^2 \\ & = \underline{2m^2 - 6} \end{aligned}$$

302 Identités et formules de base en algèbre

Commentaires et remarques

I. Cette fiche 302 est consacrée à une brève révision de quelques formules de base en calcul algébrique, formules qui sont très utiles pour la résolution technique de nombreux problèmes de mathématiques, notamment en géométrie, par exemple lorsqu'on doit travailler avec des équations de cercles (voir les fiche 351 et suivantes dès la page 72).

II. Voici quatre formules bien connues (surtout les deux premières) appelées aussi «identités remarquables». Elles peuvent être lues dans les deux sens (de gauche à droite ou de droite à gauche).

- Formule n° 1 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 Formule n° 2 $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 Formule n° 3 $(-A + B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 Formule n° 4 $(-A - B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

III. En cas de difficulté technique, il est conseillé de (re)travailler avec la brochure BAC-CH 0, intitulée «*RÉVISION DES NOTIONS DE BASE*» (informations sur le site www.bac-ch.ch).

Exercices

Transformer l'écriture de la donnée en utilisant une des quatre formules ci-dessus. Rédiger toutes les étapes de calcul et préciser dans chaque cas le numéro de la formule qui a été utilisée ainsi que la valeur des lettres A et B correspondant à cette formule.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $(2x + 3y)^2$ | 2) $(5x - 4y)^2$ |
| 3) $(-3x + 4y)^2$ | 4) $(-2x - 5y)^2$ |
| 5) $(0.5p - 2.5q)^2$ | 6) $(-3.2m - 5.3n)^2$ |
| 7) $(-3.7d + 2.6e)^2$ | 8) $(3.8t + 1.7s)^2$ |

Quel est le nombre qu'il faudrait ajouter à la donnée pour que celle-ci puisse être écrite sous la forme d'une parenthèse au carré.

- | | |
|------------------|------------------|
| 9) $x^2 + 6x$ | 10) $y^2 - 8y$ |
| 11) $x^2 - 7.4x$ | 12) $y^2 + 3.6y$ |
| 13) $x^2 + 4.8x$ | 14) $y^2 - 6.2y$ |

Solution détaillée

1) $(2x + 3y)^2$ est de la forme $(A+B)^2$
 avec $A = 2x$ et $B = 3y$
 Utiliser la formule n°1
 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2$
 $= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

2) $(5x - 4y)^2$ est de la forme $(A-B)^2$
 avec $A = 5x$ et $B = 4y$
 Utiliser la formule n°2
 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 $(5x - 4y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot (5x) \cdot (4y) + (4y)^2$
 $= 25x^2 - 40xy + 16y^2$

3) $(-3x + 4y)^2$ est de la forme $(-A+B)^2$
 Formule n°3 avec $A = 3x$ et $B = 4y$
 $(-A + B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 $(-3x + 4y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2$
 $= 9x^2 - 24xy + 16y^2$

4) $(-2x - 5y)^2$ est de la forme $(-A-B)^2$
 Formule n°4 avec $A = 2x$ et $B = 5y$
 $(-A - B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $(-2x - 5y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2$
 $= 4x^2 + 20xy + 25y^2$

5) $(0.5p - 2.5q)^2 = (A - B)^2$
 Formule 2 avec $A = 0.5p$ et $B = 2.5q$
 $(0.5p - 2.5q)^2 = (0.5p)^2 - 2 \cdot (0.5p) \cdot (2.5q) + (2.5q)^2$
 $= 0.25p^2 - 2.5pq + 6.25q^2$

6) $(-3.2m - 5.3n)^2 = (-A - B)^2$
 Formule 4 avec $A = 3.2m$ et $B = 5.3n$
 $(-3.2m - 5.3n)^2 = (3.2m)^2 + 2(3.2m)(5.3n) + (5.3n)^2$
 $= 10.24m^2 + 33.92mn + 28.09n^2$

7) Formule 3 avec $A = 3.7d$ et $B = 2.6e$
 $(-3.7d + 2.6e)^2 = 13.69d^2 - 19.24de + 6.76e^2$

8) Formule 1 avec $A = 3.8t$ et $B = 1.7s$
 $(3.8t + 1.7s)^2 = 14.44t^2 + 12.92ts + 2.89s^2$

9) $x^2 + 6x$ est le début de la forme $A^2 + 2AB$ (formule 1)
 Il manque $+ B^2$ pour avoir $(A+B)^2$
 Il manque donc $+ 9$ ($= + 3^2$)

10) $y^2 - 8y$ est le début de la forme $A^2 - 2AB$ (formule 2)
 Il manque $+ B^2$ pour avoir $(A-B)^2$
 Il manque donc $+ 16$ ($= + 4^2$)

11) Il manque $+ 13.69$ ($= + 3.7^2$)
 pour avoir $(x - 3.7)^2$

12) Il manque $+ 3.24$ ($= + 1.8^2$)
 pour avoir $(y + 1.8)^2$

13) Il manque $+ 5.76$ ($= + 2.4^2$)
 pour avoir $(x + 2.4)^2$

14) Il manque $+ 9.61$ ($= + 3.1^2$)
 pour avoir $(y - 3.1)^2$