MATHÉMATIQUES BAC-CH 4

LES BROCHURES DE MATHÉMATIQUES BAC-CH

Imaginées et conçues par un professeur de gymnase de Lausanne, les brochures de mathématiques BAC-CH proposent un grand choix d'exercices avec solutions rédigées, utilisables dès la fin de la scolarité obligatoire (14 à 16 ans) et jusqu'à la maturité en Suisse romande (18 à 20 ans).

Elles peuvent être utilisées individuellement par des élèves souhaitant consolider leurs connaissances à la maison, en petit groupe par des élèves travaillant de manière autonome, ou par des établissements scolaires publics ou privés souhaitant équiper les élèves de plusieurs classes de même niveau. Elles permettent notamment aux enseignants de disposer d'exercices supplémentaires pour des séances de révision et d'encourager leurs élèves à fournir un travail régulier.

PAR ORDRE PROGRESSIF DE DIFFICULTÉ

Les brochures de mathématiques BAC-CH sont rédigées avec un souci pédagogique de clarté et d'efficacité, de manière à favoriser un travail autonome de l'élève. Numérotées de 1 à 6, elles sont conçues par ordre progressif de difficulté, en tenant compte de l'âge et du niveau de scolarité des élèves concernés.

Les brochures **BAC-CH 0 et 1** sont principalement destinées à la révision, permettant de consolider des notions de base acquises avant le début de la scolarité postobligatoire. Elles conviennent également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en début de scolarité postobligatoire.

La brochure **BAC-CH 2** est destinée aux élèves en début de scolarité postobligatoire, programme de maturité, niveau standard de mathématiques. Elle convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en milieu de scolarité postobligatoire.

Les brochures **BAC-CH 3, 4 et 5** sont destinées aux élèves en fin de scolarité postobligatoire, programme de maturité (élèves des deux dernières années), niveau standard de mathématiques. Une partie des brochures BAC-CH 4 et 5 convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, pour les deux dernières années de scolarité postobligatoire. Les trois brochures contiennent chacune des données d'examen écrit de maturité de mathématiques de niveau standard, provenant d'épreuves officielles d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande.

La brochure **BAC-CH 6** propose un choix de problèmes extraits des brochures BAC-CH 3, 4 et 5 : problèmes de révision, problèmes d'examen écrit et questions d'examen oral pour préparer l'examen de maturité.

TABLE DES MATIÈRES

4.3 FONCTIONS EXPONENTIELLES I : NOTIONS DE BASE, ÉQUATIONS p.33

4.4 FONCTIONS EXPONENTIELLES II : ASYMPTOTES, CROISSANCE p.45

4.5 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES I : NOTIONS DE BASE, ÉQUATIONS p.57

4.1

FONCTIONS RATIONNELLES I
EDf, PARITÉ,
SIGNES, ASYMPTOTES

401 Ensemble de définition (EDf) d'une fonction rationnelle f(x)

Commentaires et remarques

I. On dit qu'une fonction f(x) est une fonction rationnelle si elle a la forme d'un quotient de deux polynômes. En voici un exemple :

$$f(x) = \frac{5x + 9}{4 - x^2} = \frac{\textit{polynôme (de degré 1)}}{\textit{polynôme (de degré 2)}}$$

II. Lorsqu'on choisit une valeur de x et qu'on calcule f(x) avec une calculette, on obtient en général sans difficulté une valeur numérique. Ainsi, en mettant x = 1 dans la fonction ci-dessus on obtient $f(1) = \frac{14}{3} = 4.67$. Il peut y avoir cependant des valeurs de x qui rendent ce calcul impossible : c'est le cas, pour cette même fonction, si on choisit x = 2, parce qu'on a alors $f(2) = \frac{19}{0}$ (division par 0 !!!).

III. On appelle «ensemble de définition» de la fonction f(x) et on note EDf (ou ED_f) l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles il est possible de calculer la valeur f(x). Pour déterminer EDf, on cherche les valeurs de x qui annulent le dénominateur de la fonction et on les exclut de l'ensemble IR des nombres réels.

Exercices

Déterminer l'ensemble de définition (EDf) des fonctions ci-dessous.

1) $f(x) = \frac{5 - 2x}{x - 1}$ 2) $f(x) = \frac{3x + 4}{x - 6}$

3) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 4}$ 4) $f(x) = \frac{5x + 3}{9 - x^2}$

5) $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^2 - 6x + 8}$ 6) $f(x) = \frac{5x^2 - 4x + 1}{- x^2 + 6x - 9}$

7) $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 3}{(x - 4)^2}$ 8) $f(x) = \frac{- 4x^2 + x - 2}{(5x - 4)^2}$

9) $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 5x + 9}$ 10) $f(x) = \frac{5x + 4}{- x^2 + 3x - 7}$

11) $f(x) = \frac{4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 3x - 8}$ 12) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{- x^2 - 2x + 4}$

Solution détaillée

1) $f(x) = \frac{5-2x}{x-1} \leftarrow$ [Condition : dénominateur $\neq 0$
$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{1\}}$

2) $f(x) = \frac{3x+4}{x-6} \leftarrow$ [Cond : dénominateur $\neq 0$
$x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{6\}}$

3) $f(x) = \frac{3x^2+4x-7}{x^2-4} \leftarrow$ [Cond : dénom $\neq 0$
$x^2 - 4 \neq 0$
$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{-2;2\}}$

4) $f(x) = \frac{5x+3}{9-x^2} \leftarrow$ [Cond : dénom $\neq 0$
$9 - x^2 \neq 0$
$x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3$
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{-3;3\}}$

5) Condition : dénominateur $\neq 0$
$x^2 - 6x + 8 \neq 0$
On cherche les valeurs de x telles que $x^2 - 6x + 8 = 0$ et on les considère comme inacceptables
$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = <^{2}_{4}$ [valeurs à exclure
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{2;4\}}$

6) Condition : $-x^2 + 6x - 9 \neq 0$
Chercher les solutions x de l'équation $-x^2 + 6x - 9 = 0$
On obtient une seule solution $x = 3$
Cette valeur $x = 3$ est à exclure
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{3\}}$

7) Condition : $(x-4)^2 \neq 0$
$x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{4\}}$

8) Condition : $(5x-4)^2 \neq 0$
$5x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0.8$
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{0.8\}}$

9) Condition : $x^2 - 5x + 9 \neq 0$
On remarque qu'il n'est pas possible de trouver une valeur x telle que $x^2 - 5x + 9 = 0$ (car $\Delta < 0$)
$\Rightarrow$ aucune valeur de x est à exclure $\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

10) Condition : $-x^2 + 3x - 7 \neq 0$
Il n'y a aucune valeur de x qui annule $-x^2 + 3x - 7$ (car $\Delta < 0$)
$\Rightarrow$ il n'y a pas de valeur x à exclure $\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

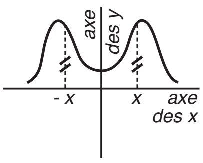
11) Condition : $x^2 + 3x - 8 \neq 0$
Les valeurs x à exclure sont les solutions de $x^2 + 3x - 8 = 0$
$x = <^{1.70}_{-4.70}$] valeurs à exclure
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{-4.70;1.70\}}$

12) Condition : $-x^2 - 2x + 4 \neq 0$
Les valeurs à exclure sont les solutions de $-x^2 - 2x + 4 = 0$
$x = <^{-3.24}_{1.24}$] valeurs à exclure
$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} - \{-3.24;1.24\}}$

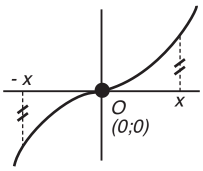
402 Parité d'une fonction rationnelle

Commentaires et remarques

I. On dit qu'une fonction f(x) est PAIRE si la courbe associée à cette fonction admet l'axe des y comme axe de symétrie.



II. On dit qu'une fonction f(x) est IMPAIRE si la courbe associée à cette fonction admet le point origine O(0;0) comme centre de symétrie.



III. Pour savoir si une fonction est PAIRE ou IMPAIRE (sans la dessiner préalablement) on utilise une procédure purement algébrique consistant à remplacer (substitution) x par la valeur - x dans l'écriture algébrique de f(x). On aboutit ainsi à une valeur abstraite f(- x). On compare ensuite l'écriture de f(- x) ainsi obtenue avec celle de f(x). Si on constate que f(- x)= f(x), c'est que la fonction est PAIRE. Si on constate que f(- x) = - f(x) alors on peut affirmer que la fonction est IMPAIRE. Dans les autres cas, la fonction est NI PAIRE NI IMPAIRE.

Exercices

Étudier la parité des fonctions ci-dessous (paire ? impaire ? ni paire ni impaire ?).

1) $f(x) = x^2 - 5$
2) $f(x) = x - 4x^3$
3) $f(x) = 6 + 3x - x^2$
4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
5) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{1 - 4x^2}$
6) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{1 + x^2}$
7) $f(x) = \dfrac{4 - 3x^2}{2x^3 + 7x}$
8) $f(x) = \dfrac{5 - 2x}{x^2 + 4}$
9) $f(x) = \dfrac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2 - 5x^2}$
10) $f(x) = \dfrac{3x + x^3}{5x^3 - 2x}$
11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{1 + 3x^2}$
12) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 2}{3x^4 - 5}$
13) $f(x) = \dfrac{4x^5 - 3x}{2x + 7x^3}$
14) $f(x) = \dfrac{6x^4 - 7}{5x + x^3}$

Solution détaillée

1) $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>paire</u>

2) $f(-x) = (-x) - 4\cdot(-x)^3 = -x + 4x^3 = -(x - 4x^3) = -f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>impaire</u>

3) $f(-x) = 6 + 3(-x) - (-x)^2 = 6 - 3x - x^2$
Le résultat obtenu n'est pas $= f(x)$ et n'est pas non plus $= -f(x)$
$\Rightarrow$ la fonction est <u>ni paire ni impaire</u>

4) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{1}{x^2 - 1} = f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>paire</u>

5) $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2 + 3}{1 - 4(-x)^2} = \dfrac{2x^2 + 3}{1 - 4x^2} = f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>paire</u>

6) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 + 3\cdot(-x)}{1 + (-x)^2} = \dfrac{-x^3 - 3x}{1 + x^2}$
$= \dfrac{-(x^3 + 3x)}{1 + x^2} = -\dfrac{x^3 + 3x}{1 + x^2} = -f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>impaire</u>

7) $f(-x) = \dfrac{4 - 3\cdot(-x)^2}{2(-x)^3 + 7\cdot(-x)} = \dfrac{4 - 3x^2}{-2x^3 - 7x}$
$= \dfrac{4 - 3x^2}{-(2x^3 + 7x)} = -\dfrac{4 - 3x^2}{2x^3 + 7x} = -f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>impaire</u>

8) $f(-x) = \dfrac{5 - 2(-x)}{(-x)^2 + 4} = \dfrac{5 + 2x}{x^2 + 4}$
Le résultat obtenu n'est pas $= f(x)$ et n'est pas non plus $= -f(x)$
$\Rightarrow$ la fonction est <u>ni paire ni impaire</u>

9) $f(-x) = \dfrac{5(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1}{2 - 5(-x)^2} = \dfrac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2 - 5x^2}$
$= f(x) \Rightarrow$ c'est une fonction <u>paire</u>

10) $f(-x) = \dfrac{3\cdot(-x) + (-x)^3}{5\cdot(-x)^3 - 2\cdot(-x)} = \dfrac{-3x - x^3}{-5x^3 + 2x}$
$= \dfrac{-(3x + x^3)}{-(5x^3 - 2x)} = \dfrac{3x + x^3}{5x^3 - 2x} = f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>paire</u>

11) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 4\cdot(-x) + 7}{1 + 3(-x)^2} = \dfrac{x^2 + 4x + 7}{1 + 3x^2}$
On n'obtient ni $= f(x)$ ni $= -f(x)$
$\Rightarrow$ la fonction est <u>ni paire ni impaire</u>

12) $f(-x) = \dfrac{5(-x)^2 + 2}{3(-x)^4 - 5} = \dfrac{5x^2 + 2}{3x^4 - 5} = f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>paire</u>

13) $f(-x) = \dfrac{4(-x)^5 - 3\cdot(-x)}{2(-x) + 7(-x)^3} = \dfrac{-4x^5 + 3x}{-2x - 7x^3}$
$= \dfrac{-(4x^5 - 3x)}{-(2x + 7x^3)} = \dfrac{4x^5 - 3x}{2x + 7x^3} = f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>paire</u>

14) $f(-x) = \dfrac{6(-x)^4 - 7}{5\cdot(-x) + (-x)^3} = \dfrac{6x^4 - 7}{-5x - x^3}$
$= \dfrac{6x^4 - 7}{-(5x + x^3)} = -\dfrac{6x^4 - 7}{5x + x^3} = -f(x)$
$\Rightarrow$ c'est une fonction <u>impaire</u>