

MATHÉMATIQUES BAC-CH 4

LES BROCHURES DE MATHÉMATIQUES BAC-CH

Imaginées et conçues par un professeur de gymnase de Lausanne, les brochures de mathématiques BAC-CH proposent un grand choix d'exercices avec solutions rédigées, utilisables dès la fin de la scolarité obligatoire (14 à 16 ans) et jusqu'à la maturité en Suisse romande (18 à 20 ans).

Elles peuvent être utilisées individuellement par des élèves souhaitant consolider leurs connaissances à la maison, en petit groupe par des élèves travaillant de manière autonome, ou par des établissements scolaires publics ou privés souhaitant équiper les élèves de plusieurs classes de même niveau. Elles permettent notamment aux enseignants de disposer d'exercices supplémentaires pour des séances de révision et d'encourager leurs élèves à fournir un travail régulier.

PAR ORDRE PROGRESSIF DE DIFFICULTÉ

Les brochures de mathématiques BAC-CH sont rédigées avec un souci pédagogique de clarté et d'efficacité, de manière à favoriser un travail autonome de l'élève. Numérotées de 1 à 6, elles sont conçues par ordre progressif de difficulté, en tenant compte de l'âge et du niveau de scolarité des élèves concernés.

Les brochures **BAC-CH 0 et 1** sont principalement destinées à la révision, permettant de consolider des notions de base acquises avant le début de la scolarité postobligatoire. Elles conviennent également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en début de scolarité postobligatoire.

La brochure **BAC-CH 2** est destinée aux élèves en début de scolarité postobligatoire, programme de maturité, niveau standard de mathématiques. Elle convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en milieu de scolarité postobligatoire.

Les brochures **BAC-CH 3, 4 et 5** sont destinées aux élèves en fin de scolarité postobligatoire, programme de maturité (élèves des deux dernières années), niveau standard de mathématiques. Une partie des brochures BAC-CH 4 et 5 convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, pour les deux dernières années de scolarité postobligatoire. Les trois brochures contiennent chacune des données d'examen écrit de maturité de mathématiques de niveau standard, provenant d'épreuves officielles d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande.

La brochure **BAC-CH 6** propose un choix de problèmes extraits des brochures BAC-CH 3, 4 et 5 : problèmes de révision, problèmes d'examen écrit et questions d'examen oral pour préparer l'examen de maturité.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction : une nouvelle brochure BAC-CH	p.3
Conseils d'utilisation de cette brochure	p.3
Mathématiques, musique et peinture	p.3

4.1 FONCTIONS RATIONNELLES I : EDF, PARITÉ, SIGNES, ASYMPTOTES p.9

401	Ensemble de définition (EDf) d'une fonction rationnelle $f(x)$	p.10
402	Parité d'une fonction rationnelle	p.11
403	Tableau des signes d'une fonction rationnelle : quelques exemples simples	p.12
404	Tableau des signes d'une fonction rationnelle : quelques exemples moins simples	p.13
405	Asymptote(s) verticale(s) d'une fonction rationnelle, calculs de limites, esquisses	p.14
406	Fonction rationnelle mise sous la forme $f(x) = mx + h + \delta(x)$ après division euclidienne	p.15
407	Calcul de la limite de $\delta(x)$ lorsque x tend vers l'infini	p.16
408	Asymptote horizontale (AH) ou oblique (AO) d'une fonction rationnelle	p.17
409	Position de la courbe par rapport à son asymptote : cas AH (asymptote horizontale)	p.18
410	Position de la courbe par rapport à son asymptote : cas AO (asymptote oblique)	p.19

4.2 FONCTIONS RATIONNELLES II : DÉRIVÉES, PENTES, CROISSANCE p.21

411	Calcul technique de la dérivée $f'(x)$ d'une fonction polynômiale $f(x)$	p.22
412	Dérivée = pente de la tangente au graphe, visualisation de certains exemples	p.23
413	Angle (orienté) d'une courbe (par rapport à l'horizontale) en un point de cette courbe	p.24
414	Équation de la tangente à une courbe polynômiale en un point de cette courbe	p.25
415	Tableau de croissance d'une fonction polynômiale	p.26
416	Dérivée d'un produit ou d'un quotient de polynômes (fonctions rationnelles)	p.27
417	Dérivée d'une fonction composée, multiplication par la «dérivée interne»	p.28
418	Angles compris entre deux courbes polynômiales ou rationnelles	p.29
419	Tableau de croissance d'une fonction rationnelle : quelques exemples simples	p.30
420	Tableau de croissance d'une fonction rationnelle : quelques exemples moins simples	p.31

4.3	FONCTIONS EXPONENTIELLES I : NOTIONS DE BASE, ÉQUATIONS	p.33
421	Calculs algébriques avec les écritures a^m , b^n (m et n entiers positifs ou négatifs)	p.34
422	Calculs avec des racines (carrée, cubique, etc.) et des exposants rationnels	p.35
423	Quelques exemples de fonctions exponentielles et logarithmiques	p.36
424	Équations exponentielles et logarithmiques simples (à résoudre sans calculette)	p.37
425	Équations exponentielles du type $a^x = u$, par exemple $4^x = 17$	p.38
426	Équations exponentielles du type $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, par exemple $2^{3x+2} = 5^{-2x+5}$	p.39
427	Équations exponentielles nécessitant un changement de variable (poser $t = \dots$)	p.40
428	Quelques exemples d'équations logarithmiques	p.41
429	Quelques problèmes : 1ère série (croissance de population, etc.)	p.42
430	Quelques problèmes : 2ème série (placement de capitaux, intérêts composés, etc.)	p.43
4.4	FONCTIONS EXPONENTIELLES II : ASYMPTOTES, CROISSANCE	p.45
431	Ensemble de définition d'une fonction comportant une partie exponentielle	p.46
432	Parité d'une fonction comportant une partie exponentielle	p.47
433	Signe d'une fonction comportant une partie exponentielle	p.48
434	Dérivée d'une fonction comportant une partie exponentielle	p.49
435	Pente de la tangente à une courbe exponentielle, angle (orienté) par rapport à l'horizontale	p.50
436	Angles compris entre deux courbes (dont au moins une est exponentielle)	p.51
437	Équation de la tangente à une courbe exponentielle en un point de cette courbe	p.52
438	Tableau de croissance d'une fonction comportant une partie exponentielle	p.53
439	Asymptote(s) verticale(s) et points-trous (à gauche / à droite)	p.54
440	Asymptote horizontale (à gauche / à droite) d'une fonction avec une partie exponentielle	p.55
4.5	FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES I : NOTIONS DE BASE, ÉQUATIONS	p.57
441	Le cercle trigonométrique, visualiser $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ (unité de l'angle x en degrés)	p.58
442	Autre choix d'unité pour la mesure d'un angle : les radians	p.59
443	Quelques cas particuliers : les valeurs dites «exactes»	p.60
444	Propriétés des fonctions \sin , \cos et \tan (symétries, signes, formules de base, etc.)	p.61
445	Équations trigonométriques simples, conventions de notation pour les solutions	p.62

446	Équations trigonométriques polynômiales en sin, cos ou tan	p.63
447	Équations du type $\sin(A) = \sin(B)$ ou $\cos(A) = \cos(B)$ ou $\tan(A) = \tan(B)$	p.64
448	Équations du type $\sin(A) = \cos(B)$ ou $\sin(A) = -\sin(B)$ ou $\tan(A) = -\tan(B)$, etc	p.65
449	Équations homogènes en sin et en cos, de degré 1 ou de degré 2	p.66
450	Équations linéaires en sin et en cos (équations du type $a \sin x + b \cos x = c$)	p.67

4.6 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES II : SIGNES, DÉRIVÉES, CROISSANCE p.69

451	Quelques équations trigonométriques à résoudre	p.70
452	Ensemble de définition (EDf) de fonctions avec sin, cos et tan	p.71
453	Tableau des signes de fonctions avec sin, cos et tan	p.72
454	Asymptote(s) verticale(s) de fonctions avec sin et cos	p.73
455	Calculs de dérivées I : sommes et produits de fonctions avec sin et cos	p.74
456	Calculs de dérivées II : quotients de fonctions avec sin et cos	p.75
457	Calculs de dérivées III : sommes, produits et quotients de fonctions avec tan	p.76
458	Tableau de croissance I : sommes et produits de fonctions avec sin et cos	p.77
459	Tableau de croissance II : quotients de fonctions avec sin et cos	p.78
460	Tableau de croissance III : sommes, produits et quotients de fonctions avec tan	p.79

4.7 COMPLÉMENTS D'ANALYSE : SIGNES, LIMITES, ASYMPTOTES p.81

461	Ensemble de définition d'une fonction non rationnelle de type «racine» (carrée)	p.82
462	Dérivées particulières : fonctions de type «racine» (carrée, cubique, etc)	p.83
463	Tableau des signes particuliers I : fonctions «racine» (carrée)	p.84
464	Tableau des signes particuliers II : fonctions exponentielles	p.85
465	Tableau des signes particuliers III : fonctions logarithmiques	p.86
466	Indéterminations et limites I : fonctions rationnelles et fonctions «racine carrée»	p.87
467	Indéterminations et limites II : exemples d'utilisation de la règle de l'Hospital	p.88
468	Asymptotes verticales et points limites (points-trous) : quelques cas particuliers	p.89
469	Indéterminations et limites III : exemples d'utilisation de la règle de dominance	p.90
470	Comportement asymptotique (à l'infini) d'une courbe : quelques cas particuliers	p.91

4.8	FONCTIONS RATIONNELLES III : 12 + 12 ÉTUDES DE FONCTIONS	p.93
	Étude d'une fonction rationnelle : les étapes principales	p.93
	12 données de fonctions rationnelles à étudier FR1 à FR12 avec solutions rédigées de manière détaillée	p.94
	12 fonctions rationnelles supplémentaires à étudier FR1 bis à FR12 bis avec réponses (sans rédaction)	p.102
4.9	FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES III : 12 + 12 ÉTUDES DE FONCTIONS	p.105
	Étude d'une fonction trigonométrique : les étapes principales	p.105
	12 données de fonctions trigonométriques à étudier FT1 à FT12 avec solutions rédigées de manière détaillée	p.106
	12 fonctions trigonométriques supplémentaires à étudier FT1 bis à FT12 bis avec réponses (sans rédaction)	p.114
4.10	FONCTIONS EXPONENTIELLES III : 12 + 12 ÉTUDES DE FONCTIONS	p.117
	Étude d'une fonction exponentielle : les étapes principales	p.117
	12 données de fonctions exponentielles à étudier FE1 à FE12 avec solutions rédigées de manière détaillée	p.118
	12 fonctions exponentielles supplémentaires à étudier FE1 bis à FE12 bis avec réponses (sans rédaction)	p.126
4.11	12 PROBLÈMES D'EXAMEN ÉCRIT D'OPTIMISATION	p.129
	Remerciements & références des problèmes	p.129
OP	Exemple de résolution d'un problème d'optimisation (avec commentaires)	p.130
OP1 à OP12	12 problèmes d'optimisation extraits d'épreuves écrites officielles de maturité ou de baccalauréat d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande	p.132
	AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES	

4.1

FONCTIONS RATIONNELLES I EDf, PARITÉ, SIGNES, ASYMPTOTES

401	Ensemble de définition (EDf) d'une fonction rationnelle $f(x)$	p.10
402	Parité d'une fonction rationnelle	p.11
403	Tableau des signes d'une fonction rationnelle : quelques exemples simples	p.12
404	Tableau des signes d'une fonction rationnelle : quelques exemples moins simples	p.13
405	Asymptote(s) verticale(s) d'une fonction rationnelle, calculs de limites, esquisses	p.14
406	Fonction rationnelle mise sous la forme $f(x) = mx + h + \delta(x)$ après division euclidienne	p.15
407	Calcul de la limite de $\delta(x)$ lorsque x tend vers l'infini	p.16
408	Asymptote horizontale (AH) ou oblique (AO) d'une fonction rationnelle	p.17
409	Position de la courbe par rapport à son asymptote : cas AH (asymptote horizontale)	p.18
410	Position de la courbe par rapport à son asymptote : cas AO (asymptote oblique)	p.19

401 Ensemble de définition (EDf) d'une fonction rationnelle f(x)

Commentaires et remarques

- I. On dit qu'une fonction f(x) est une fonction rationnelle si elle a la forme d'un quotient de deux polynômes. En voici un exemple :

$$f(x) = \frac{5x+9}{4-x^2} = \frac{\text{polynôme (de degré 1)}}{\text{polynôme (de degré 2)}}$$

- II. Lorsqu'on choisit une valeur de x et qu'on calcule f(x) avec une calculette, on obtient en général sans difficulté une valeur numérique. Ainsi, en mettant x = 1 dans la fonction ci-dessus on obtient $f(1) = \frac{14}{3} = 4.67$. Il peut y avoir cependant des valeurs de x qui rendent ce calcul impossible : c'est le cas, pour cette même fonction, si on choisit x = 2, parce qu'on a alors $f(2) = \frac{19}{0}$ (division par 0 !!!).
- III. On appelle «ensemble de définition» de la fonction f(x) et on note EDf (ou ED_f) l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles il est possible de calculer la valeur f(x). Pour déterminer EDf, on cherche les valeurs de x qui annulent le dénominateur de la fonction et on les exclut de l'ensemble IR des nombres réels.

Exercices

Déterminer l'ensemble de définition (EDf) des fonctions ci-dessous.

1) $f(x) = \frac{5-2x}{x-1}$ 2) $f(x) = \frac{3x+4}{x-6}$

3) $f(x) = \frac{3x^2+4x-7}{x^2-4}$ 4) $f(x) = \frac{5x+3}{9-x^2}$

5) $f(x) = \frac{3x^2-5}{x^2-6x+8}$ 6) $f(x) = \frac{5x^2-4x+1}{-x^2+6x-9}$

7) $f(x) = \frac{3x^2-5x+3}{(x-4)^2}$ 8) $f(x) = \frac{-4x^2+x-2}{(5x-4)^2}$

9) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-5x+9}$ 10) $f(x) = \frac{5x+4}{-x^2+3x-7}$

11) $f(x) = \frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-8}$ 12) $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{-x^2-2x+4}$

Solution détaillée

1) $f(x) = \frac{5-2x}{x-1} \leftarrow \begin{cases} \text{Condition: dénomi} \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) $f(x) = \frac{3x+4}{x-6} \leftarrow \begin{cases} \text{Cond: dénomi} \neq 0 \\ x-6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 6 \end{cases}$
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{6\}$

3) $f(x) = \frac{3x^2+4x-7}{x^2-4} \leftarrow \begin{cases} \text{Cond: dénom} \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2 \end{cases}$
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

4) $f(x) = \frac{5x+3}{9-x^2} \leftarrow \begin{cases} \text{Condition: dénom} \neq 0 \\ 9-x^2 \neq 0 \\ x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3 \end{cases}$
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$

5) Condition: dénominateur $\neq 0$
 $x^2-6x+8 \neq 0$
 On cherche les valeurs de x telles que $x^2-6x+8=0$ et on les considère comme inacceptables
 $x^2-6x+8=0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ [valeurs à exclure]
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{2; 4\}$

6) Condition: $-x^2+6x-9 \neq 0$
 Chercher les solutions x de l'équation $-x^2+6x-9=0$
 On obtient une seule solution x=3
 Cette valeur x=3 est à exclure
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{3\}$

7) Condition: $(x-4)^2 \neq 0$
 $x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{4\}$

8) Condition: $(5x-4)^2 \neq 0$
 $5x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0.8$
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{0.8\}$

9) Condition: $x^2-5x+9 \neq 0$
 On remarque qu'il n'est pas possible de trouver une valeur x telle que $x^2-5x+9=0$ (car $\Delta < 0$)
 \Rightarrow aucune valeur de x est à exclure $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R}$

10) Condition: $-x^2+3x-7 \neq 0$
 Il n'y a aucune valeur de x qui annule $-x^2+3x-7$ (car $\Delta < 0$)
 \Rightarrow il n'y a pas de valeur x à exclure $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R}$

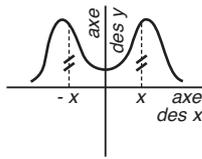
11) Condition: $x^2+3x-8 \neq 0$
 Les valeurs x à exclure sont les solutions de $x^2+3x-8=0$
 $x = \begin{cases} -4.70 \\ 1.70 \end{cases}$ [valeurs à exclure]
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{-4.70; 1.70\}$

12) Condition: $-x^2-2x+4 \neq 0$
 Les valeurs à exclure sont les solutions de $-x^2-2x+4=0$
 $x = \begin{cases} -3.24 \\ 1.24 \end{cases}$ [valeurs à exclure]
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} - \{-3.24; 1.24\}$

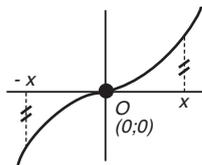
402 Parité d'une fonction rationnelle

Commentaires et remarques

I. On dit qu'une fonction $f(x)$ est PAIRE si la courbe associée à cette fonction admet l'axe des y comme axe de symétrie.



II. On dit qu'une fonction $f(x)$ est IMPAIRE si la courbe associée à cette fonction admet le point origine $O(0;0)$ comme centre de symétrie.



III. Pour savoir si une fonction est PAIRE ou IMPAIRE (sans la dessiner préalablement) on utilise une procédure purement algébrique consistant à remplacer (substitution) x par la valeur $-x$ dans l'écriture algébrique de $f(x)$. On aboutit ainsi à une valeur abstraite $f(-x)$. On compare ensuite l'écriture de $f(-x)$ ainsi obtenue avec celle de $f(x)$. Si on constate que $f(-x) = f(x)$, c'est que la fonction est PAIRE. Si on constate que $f(-x) = -f(x)$ alors on peut affirmer que la fonction est IMPAIRE. Dans les autres cas, la fonction est NI PAIRE NI IMPAIRE.

Exercices

Étudier la parité des fonctions ci-dessous (paire ? impaire ? ni paire ni impaire ?).

- | | |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1) $f(x) = x^2 - 5$ | 2) $f(x) = x - 4x^3$ |
| 3) $f(x) = 6 + 3x - x^2$ | 4) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ |
| 5) $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{1 - 4x^2}$ | 6) $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{1 + x^2}$ |
| 7) $f(x) = \frac{4 - 3x^2}{2x^3 + 7x}$ | 8) $f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 + 4}$ |
| 9) $f(x) = \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2 - 5x^2}$ | 10) $f(x) = \frac{3x + x^3}{5x^3 - 2x}$ |
| 11) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{1 + 3x^2}$ | 12) $f(x) = \frac{5x^2 + 2}{3x^4 - 5}$ |
| 13) $f(x) = \frac{4x^5 - 3x}{2x + 7x^3}$ | 14) $f(x) = \frac{6x^4 - 7}{5x + x^3}$ |

Solution détaillée

1) $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction paire

2) $f(-x) = (-x) - 4(-x)^3 = -x + 4x^3$
 $= -(x - 4x^3) = -f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction impaire

3) $f(-x) = 6 + 3(-x) - (-x)^2 = 6 - 3x - x^2$
 Le résultat obtenu n'est pas $= f(x)$ et n'est pas non plus $= -f(x)$
 \Rightarrow la fonction est ni paire ni impaire

4) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction paire

5) $f(-x) = \frac{2(-x)^2 + 3}{1 - 4(-x)^2} = \frac{2x^2 + 3}{1 - 4x^2} = f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction paire

6) $f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{-x^3 - 3x}{1 + x^2}$
 $= -\frac{(x^3 + 3x)}{1 + x^2} = -\frac{x^3 + 3x}{1 + x^2} = -f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction impaire

7) $f(-x) = \frac{4 - 3(-x)^2}{2(-x)^3 + 7(-x)} = \frac{4 - 3x^2}{-2x^3 - 7x}$
 $= \frac{4 - 3x^2}{-(2x^3 + 7x)} = -\frac{4 - 3x^2}{2x^3 + 7x} = -f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction impaire

8) $f(-x) = \frac{5 - 2(-x)}{(-x)^2 + 4} = \frac{5 + 2x}{x^2 + 4}$
 Le résultat obtenu n'est pas $= f(x)$ et n'est pas non plus $= -f(x)$
 \Rightarrow la fonction est ni paire ni impaire

9) $f(-x) = \frac{5(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1}{2 - 5(-x)^2} = \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2 - 5x^2}$
 $= f(x) \Rightarrow$ c'est une fonction paire

10) $f(-x) = \frac{3(-x) + (-x)^3}{5(-x)^3 - 2(-x)} = \frac{-3x - x^3}{-5x^3 + 2x}$
 $= \frac{-(3x + x^3)}{-(5x^3 - 2x)} = \frac{3x + x^3}{5x^3 - 2x} = f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction paire

11) $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4(-x) + 7}{1 + 3(-x)^2} = \frac{x^2 + 4x + 7}{1 + 3x^2}$
 On n'obtient ni $= f(x)$ ni $= -f(x)$
 \Rightarrow la fonction est ni paire ni impaire

12) $f(-x) = \frac{5(-x)^2 + 2}{3(-x)^4 - 5} = \frac{5x^2 + 2}{3x^4 - 5} = f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction paire

13) $f(-x) = \frac{4(-x)^5 - 3(-x)}{2(-x) + 7(-x)^3} = \frac{-4x^5 + 3x}{-2x - 7x^3}$
 $= \frac{-(4x^5 - 3x)}{-(2x + 7x^3)} = \frac{4x^5 - 3x}{2x + 7x^3} = f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction paire

14) $f(-x) = \frac{6(-x)^4 - 7}{5(-x) + (-x)^3} = \frac{6x^4 - 7}{-5x - x^3}$
 $= \frac{6x^4 - 7}{-(5x + x^3)} = -\frac{6x^4 - 7}{5x + x^3} = -f(x)$
 \Rightarrow c'est une fonction impaire