

MATHÉMATIQUES BAC-CH 6

LES BROCHURES DE MATHÉMATIQUES BAC-CH

Imaginées et conçues par un professeur de gymnase de Lausanne, les brochures de mathématiques BAC-CH proposent un grand choix d'exercices avec solutions rédigées, utilisables dès la fin de la scolarité obligatoire (14 à 16 ans) et jusqu'à la maturité en Suisse romande (18 à 20 ans).

Elles peuvent être utilisées individuellement par des élèves souhaitant consolider leurs connaissances à la maison, en petit groupe par des élèves travaillant de manière autonome, ou par des établissements scolaires publics ou privés souhaitant équiper les élèves de plusieurs classes de même niveau. Elles permettent notamment aux enseignants de disposer d'exercices supplémentaires pour des séances de révision et d'encourager leurs élèves à fournir un travail régulier.

PAR ORDRE PROGRESSIF DE DIFFICULTÉ

Les brochures de mathématiques BAC-CH sont rédigées avec un souci pédagogique de clarté et d'efficacité, de manière à favoriser un travail autonome de l'élève. Numérotées de 0 à 6, elles sont conçues par ordre progressif de difficulté, en tenant compte de l'âge et du niveau de scolarité des élèves concernés.

Les brochures **BAC-CH 0 et 1** sont principalement destinées à la révision, permettant de consolider des notions de base acquises avant le début de la scolarité postobligatoire. Elles conviennent également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en début de scolarité postobligatoire.

La brochure **BAC-CH 2** est destinée aux élèves en début de scolarité postobligatoire, programme de maturité, niveau standard de mathématiques. Elle convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, en milieu de scolarité postobligatoire.

Les brochures **BAC-CH 3, 4 et 5** sont destinées aux élèves en fin de scolarité postobligatoire, programme de maturité (élèves des deux dernières années), niveau standard de mathématiques. Une partie des brochures BAC-CH 4 et 5 convient également aux élèves des classes de diplôme de culture générale, pour les deux dernières années de scolarité postobligatoire. Les trois brochures contiennent chacune des données d'examen écrit de maturité de mathématiques de niveau standard, provenant d'épreuves officielles d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande.

La brochure **BAC-CH 6** propose un choix de problèmes extraits des brochures BAC-CH 3, 4 et 5 : problèmes de révision, problèmes d'examen écrit et questions d'examen oral pour préparer l'examen de maturité.

TABLE DES MATIÈRES

6.1	12 PROBLÈMES DE RÉVISION DE GÉOMÉTRIE PLANE	p.7
DG1 à DG12	12 données géométriques dans le plan : droites, cercles, tangente (ces données sont extraits de la brochure BAC-CH 3) AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS À LA BROCHURE BAC-CH 3	
6.2	12 PROBLÈMES D'EXAMEN ÉCRIT DE GÉOMÉTRIE PLANE	p.33
	Remerciements & références des problèmes	p.33
GE1 à GE12	12 problèmes de géométrie plane provenant d'épreuves écrites officielles de maturité ou de baccalauréat d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande (ces problèmes sont extraits de la brochure BAC-CH 3) AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS À LA BROCHURE BAC-CH 3	p.34
6.3	12 ÉTUDES DE FONCTIONS	p.63
	Données des 12 fonctions à étudier (ces données sont extraites de la brochure BAC-CH 4)	p.63
Fonctions FR	Quatre fonctions rationnelles, AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS À LA BROCHURE BAC-CH 4	p.64
Fonctions FT	Quatre fonctions trigonométriques, AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS À LA BROCHURE BAC-CH 4	p.68
Fonctions FE	Quatre fonctions exponentielles, AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS À LA BROCHURE BAC-CH 4	p.72
6.4	12 PROBLÈMES D'EXAMEN ÉCRIT D'OPTIMISATION	p.77
	Remerciements & références des problèmes	p.77

OP1 à OP12	12 problèmes d'optimisation provenant d'épreuves écrites officielles de maturité ou de baccalauréat d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande (ces problèmes sont extraits de la brochure BAC-CH 4) AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS À LA BROCHURES BAC-CH 4	p.78
--------------------------	---	------

6.5	12 PROBLÈMES D'EXAMEN ÉCRIT D'ANALYSE	p.91
	Remerciements & références des problèmes	p.91
AN1 à AN12	12 problèmes d'analyse provenant d'épreuves écrites officielles de maturité ou de baccalauréat d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande. (ces problèmes sont extraits de la brochure BAC-CH 5) AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS AUX BROCHURES BAC-CH 4 ET 5	p.92

6.6	12 PROBLÈMES D'EXAMEN ÉCRIT DE PROBABILITÉS	p.105
	Remerciements & références des problèmes	p.105
PR1 à PR12	12 problèmes de probabilités provenant d'épreuves écrites officielles de maturité ou de baccalauréat d'établissements secondaires supérieurs de Suisse romande (ces problèmes sont extraits de la brochure BAC-CH 5) AVEC SOLUTIONS DÉTAILLÉES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS À LA BROCHURE BAC-CH 5	p.106

6.7	144 QUESTIONS (= 36 FICHES) POUR PRÉPARER L'EXAMEN ORAL	p.119
	Tirage au sort d'une fiche de préparation à l'examen oral de mathématiques, au moyen de deux jets successifs d'un dés à six faces (au total : 144 questions réparties dans 36 fiches comportant chacune 4 questions)	p.119
EO1 à E36	36 fiches de préparation à l'examen oral de mathématiques AVEC RÉPONSES, RÉFÉRENCES ET RENVOIS AUX BROCHURES BAC-CH 3, 4 ET 5	p.120

6.1

12 PROBLÈMES DE RÉVISION DE GÉOMÉTRIE PLANE

DG1 et DG2	(points, droites, angles, distances)	p.8
DG3 et DG4	(points, droites, cercles, angles, distances)	p.12
DG5 et DG6	(points, droites, cercles, tangentes, angles, distances)	p.16
DG7 et DG8	(points, droites, angles, distances)	p.20
DG9 et DG10	(points, droites, cercles, angles, distances)	p.24
DG11 et DG12	(points, droites, cercles, tangentes, angles, distances)	p.28

Remarques préalables (notations utilisées, précision des calculs)

Les notations utilisées dans cette partie 6.1 sont classiques. C'est le cas par exemple pour les notations relatives à la résolution de systèmes d'équations (avec des accolades), pour la notation des vecteurs directeurs ou normaux à une droite, ou pour l'emploi de symboles tels que $p \perp d$ (perpendiculaire). L'intersection de deux droites (ou d'un cercle avec une droite, ou encore de deux cercles) est indiquée par le symbole $\cap$ classique de la théorie des ensembles. Ainsi, pour indiquer que les droites d et d' se coupent au point P on notera $d \cap d' = \{ P \}$ ou plus simplement $d \cap d' = P$.

Les valeurs numériques indiquées dans les prochaines pages proviennent presque toutes de calculs portant sur des nombres «à virgule» arrondis en général à deux décimales (trois décimales dans certains cas, par exemple pour les vecteurs unitaires). Les réponses proposées peuvent donc différer légèrement des résultats obtenus par soi-même, selon que les arrondis de calculs sont faits à chaque étape de calcul ou seulement à la fin.

DG1 Donnée géométrique 1 (points, droites, angles, distances)

Donnée

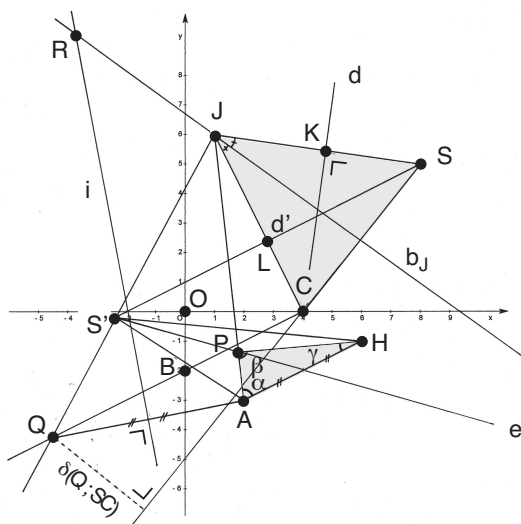
Dans un repère orthonormé $(0, x, y)$ du plan, on donne les points $A(2; -3)$, $B(0; -2)$, $C(4; 0)$ et $H(6; -1)$.

- Déterminer (= calculer les coordonnées) le point K , pied de la hauteur (notée d) issue du sommet C du triangle JCS , avec $J(1; 6)$ et $S(8; 5)$. Déterminer également le point S' symétrique du point S par rapport à la droite JC .
- Déterminer le point P tel que $e \cap AJ = \{P\}$, où e est la médiane issue du sommet S' du triangle $AS'H$. Puis calculer les trois angles du triangle APH (angle α en A , angle β en P et angle γ en H).
- Déterminer le point Q tel que $JS' \cap BC = \{Q\}$. Puis calculer la distance $\delta(Q; SC)$ ainsi que le périmètre du triangle QJC .
- On considère la bissectrice intérieure issue du sommet J (notée b_J) du triangle CJS ainsi que la médiatrice (notée i) du segment AQ . Déterminer le point R tel que $b_J \cap i = \{R\}$.

Indications pour le dessin

Dessin sur une feuille A4 disposée verticalement. Placer l'origine du repère à environ 8 cm du bord gauche et à environ 13 cm du bas de la page. L'axe des x est horizontal, l'axe des y est vertical. Unité du repère : 1 cm.

Solution graphique



Solution détaillée

a) Equation de la hauteur d
 $\vec{JS} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ joue le rôle de $\vec{n}_d$

$$d: 7x - y + c = 0$$

$$C \in d \Rightarrow 7 \cdot 4 - 0 + c = 0$$

$$c = -28$$

$$d: 7x - y - 28 = 0$$

Equation de la droite JS

$$\vec{JS} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ joue le rôle de } \vec{d}_{JS}$$

$$\vec{n}_{JS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow JS: x + 7y + c = 0$$

$$J \in JS \Rightarrow 1 + 7 \cdot 6 + c = 0 \Rightarrow c = -43$$

$$JS: x + 7y - 43 = 0$$

(Vérifier que $S \in JS$)
 $8 + 7 \cdot 5 - 43 = 0$ OK

Coordonnées du point K

$$K: \begin{cases} 7x - y - 28 = 0 & | :7 \\ x + 7y - 43 = 0 & | :1 \end{cases}$$

$$50x - 239 = 0 \Rightarrow x = 4.78$$

Après substitution on a $y = 5.46$

$$K(4.78; 5.46)$$

Equation de la droite d'
 (= droite $\perp$ à JC par S)

$$\vec{JC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ joue le rôle de } \vec{n}_{d'}$$

$$d': 3x - 6y + c = 0$$

$$S \in d' \Rightarrow 3 \cdot 8 - 6 \cdot 5 + c = 0 \Rightarrow c = 6$$

$$d': 3x - 6y + 6 = 0 \quad | :3$$

$$d': x - 2y + 2 = 0$$

Equation de la droite JC

$$\vec{JC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ joue le rôle de } \vec{d}_{JC}$$

$$\vec{n}_{JC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow JC: 6x + 3y + c = 0$$

$$J \in JC \Rightarrow 6 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + c = 0 \Rightarrow c = -24$$

$$JC: 6x + 3y - 24 = 0 \quad | :3$$

$$JC: 2x + y - 8 = 0$$

Coordonnées du point L

tel que $JC \cap d' = \{L\}$

$$L: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 & | :1 \\ 2x + y - 8 = 0 & | :2 \end{cases}$$

$$5x - 14 = 0 \Rightarrow x = 2.80$$

Après substitution on a $y = 2.40$

$$L(2.80; 2.40)$$

Coordonnées du point S'

$$\vec{OS}' = \vec{OS} + 2\vec{SL}$$

$$\vec{OS}' = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -5.20 \\ -2.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.40 \\ -0.20 \end{pmatrix}$$

$$S'(-2.40; -0.20)$$

336

(page 53)

Hauteur
issue d'un
sommet
de triangle

332

(page 49)

Droite
passant par
deux points
connus

333

(page 50)

Inter-
section
de deux
droites

334

(page 51)

Droite
perpen-
diculaire à
une droite

312

(page 25)

Symétrique
d'un point
par rapport
à un point

Solution détaillée (suite)

b) Equation de la droite e

M milieu de AH $\Rightarrow M(4; -2)$

$\vec{SM} = \begin{pmatrix} 6.40 \\ -1.80 \end{pmatrix}$ joue le rôle de $\vec{d}_e$

$\vec{n}_e = \begin{pmatrix} 1.80 \\ 6.40 \end{pmatrix} \Rightarrow e: 1.80x + 6.40y + c = 0$

$S \in e \Rightarrow 1.80 \cdot (-2.40) + 6.40 \cdot (-0.20) + c = 0$

$c = 5.60 \Rightarrow e: 1.80x + 6.40y + 5.60 = 0$

Equation de la droite AJ

$\vec{AJ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ joue le rôle de $\vec{d}_{AJ}$

$\vec{n}_{AJ} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AJ: 9x + y + c = 0$

$A \in AJ \Rightarrow 9 \cdot 2 + (-3) + c = 0$

$c = -15 \Rightarrow AJ: 9x + y - 15 = 0$

Coordonnées du point P ($= e \cap AJ$)

$$\begin{cases} 1.80x + 6.40y + 5.60 = 0 \\ 9x + y - 15 = 0 \end{cases}$$

Résoudre le système $\Rightarrow x = 1.82, y = -1.39$
 $\Rightarrow P(1.82; -1.39)$

Calcul de l'angle α

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AH}}{\|\vec{AP}\| \cdot \|\vec{AH}\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -0.18 \\ 1.61 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-0.18)^2 + 1.61^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} \\ &= \frac{-0.72 + 3.22}{1.62 \cdot 4.47} = 0.345 \\ \alpha &= 69.81^\circ \quad (\cos^{-1}) \end{aligned}$$

Calcul de l'angle β

$$\cos \beta = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PH}}{\|\vec{PA}\| \cdot \|\vec{PH}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0.18 \\ -1.61 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.18 \\ 0.39 \end{pmatrix}}{\sqrt{0.18^2 + 1.61^2} \cdot \sqrt{2.62^2 + 17.62^2}}$$

Après calcul on obtient $\beta = 88.95^\circ$

Calcul de l'angle γ

$$\cos \gamma = \frac{\vec{HA} \cdot \vec{HP}}{\|\vec{HA}\| \cdot \|\vec{HP}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4.18 \\ -0.39 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{17.62^2}}$$

Après calcul, on obtient $\gamma = 21.23^\circ$

Vérification: $\alpha + \beta + \gamma = 179.99^\circ (= 180^\circ)$

c) Equation de la droite JS'

$\vec{JS}' = \begin{pmatrix} -3.40 \\ -6.20 \end{pmatrix}$ joue le rôle de $\vec{d}_{JS'}$

$\vec{n}_{JS'} = \begin{pmatrix} 6.20 \\ 3.40 \end{pmatrix} \Rightarrow JS': 6.20x - 3.40y + c = 0$

$J \in JS' \Rightarrow 6.20 \cdot 1 - 3.40 \cdot 6 + c = 0$

$c = 14.20 \Rightarrow JS': 6.20x - 3.40y + 14.20 = 0$

Equation de la droite BC

On obtient $BC: x - 2y - 4 = 0$

Coordonnées du point Q ($= JS' \cap BC$)

$$\begin{cases} 6.20x - 3.40y + 14.20 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

312

(page 25)
Point milieu entre deux points

315

(page 28)
Calcul des angles d'un triangle

VOIR LES CALCULS

332

(page 49)
Exercice 6

Solution détaillée (fin)

Résoudre le système $\Rightarrow x = -4.67, y = -4.33$
 $\Rightarrow Q(-4.67; -4.33)$

Equation de la droite SC

$\vec{SC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ joue le rôle de $\vec{d}_{SC}$

$\vec{n}_{SC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow SC: 5x - 4y + c = 0$

$S \in SC \Rightarrow 5 \cdot 8 - 4 \cdot 5 + c = 0$

$c = -20 \Rightarrow SC: 5x - 4y - 20 = 0$

Distance de Q à la droite SC

$$\begin{aligned} d(Q; SC) &= \frac{|5 \cdot (-4.67) - 4 \cdot (-4.33) - 20|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{|-26.03|}{\sqrt{41}} = 4.07 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Périmètre du triangle QJC

$$\begin{aligned} \text{Périmètre} &= \|\vec{QJ}\| + \|\vec{JC}\| + \|\vec{CQ}\| \\ &= \|\begin{pmatrix} 5.67 \\ 10.33 \end{pmatrix}\| + \|\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}\| + \|\begin{pmatrix} -8.67 \\ -4.33 \end{pmatrix}\| \\ &= 11.78 + 6.71 + 9.69 = 28.18 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

d) Equation de la bissectrice en J

Les équations des côtés JC et JS ont été calculées en a)

$$\frac{2x + y - 8}{\sqrt{5}} = \pm \frac{x + 7y - 43}{\sqrt{50}} \quad | \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{50}$$

$$\sqrt{50}(2x + y - 8) = \pm \sqrt{5}(x + 7y - 43)$$

$$14.14x + 7.07y - 56.57 = \pm(2.24x + 15.65y - 96.15)$$

Cas +

$$14.14x + 7.07y - 56.57 = 2.24x + 15.65y - 96.15$$

$$-8.58y = -11.90x - 39.58 \quad | : (-8.58)$$

$y = 1.39x + 4.61$ (la pente de cette droite est positive. On voit sur le dessin que ce n'est pas la bissectrice intérieure que l'on cherche)

Cas -

$$14.14x + 7.07y - 56.57 = -2.24x - 15.65y + 96.15$$

$$22.72y = -16.38x + 152.72 \quad | : 22.72$$

$$y = -0.72x + 6.72$$

(c'est la droite b_3 cherchée)

Equation de la médiatrice i de AQ

$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} -6.67 \\ -1.33 \end{pmatrix}$ joue le rôle de $\vec{d}_i$

$\Rightarrow i: -6.67x - 1.33y + c$

N milieu de AQ

$$N = \left(\frac{2 + (-4.67)}{2}, \frac{-3 + (-4.33)}{2} \right) = (-1.34; -3.67)$$

$N \in i \Rightarrow -6.67 \cdot (-1.34) - 1.33 \cdot (-3.67) + c = 0$

$c = -13.82 \Rightarrow i: -6.67x - 1.33y - 13.82 = 0$

Coordonnées du point R ($= b_3 \cap i$)

$$\begin{cases} y = -0.72x + 6.72 \\ -6.67x - 1.33y - 13.82 = 0 \end{cases}$$

Résoudre le système $\Rightarrow x = -3.99, y = 9.59$

$\Rightarrow R(-3.99; 9.59)$

338

(page 55)
Distance d'un point à une droite

339

(page 56)
Bissectrices de deux droites

336

(page 53)
Médiatrice de deux points connus