Table des matières

Jakob

Bernoulli

1654-1705

Suisse
Né à Bâle (Suisse)
Mort à Bâle

Jakob Bernoulli descend d'une famille protestante qui s'enfuit d'Anvers en 1583, pour échapper aux massacres des huguenots. Elle se réfugie à Francfort, avant de s'établir à Bâle. Son père Jean est conseiller d'État à Bâle, ses frères Nicolas et Jean seront respectivement peintre et mathématicien. Il fait d'abord des études de théologie, puis se révolte et étudie alors la physique et les mathématiques. Il devient professeur et plus tard recteur à l'université dès 1687 (jusqu'à sa mort).

En 1690, il est le premier à utiliser le mot « intégrale ». En 1697, avec son frère Jean, il découvre que la cycloïde* est le chemin de descente le plus rapide entre deux points d'altitudes différentes : la cycloïde est donc brachystochrone. Elle est aussi tautochrone, ce qui signifie que les temps pour descendre de deux points d'altitudes différentes jusqu'à un troisième sont les mêmes.

Il perfectionne le calcul différentiel* et le calcul intégral* au-delà des limites atteintes par Newton et Leibniz. Il entretient d'ailleurs une importante correspondance avec le second, qu'il admirait. Notons cependant que celui-ci mit près de trois ans pour lui répondre au sujet du calcul infinitésimal*. Dans son étude du problème des isopérimètres (courbes de longueur fixe entourant une surface dont l'aire est à maximiser), il introduit les premiers principes du calcul des variations*. Il développe aussi les principes et les applications du calcul des probabilités, diffusés dans une œuvre posthume (1713) sous le titre *Ars conjectandi*. Il effectue de nombreuses études de courbes en géométrie analytique*, dont la lemniscate, utilisée aujourd'hui comme symbole de l'infini, et la spirale (dite logarithmique), dont il demande qu'elle figure dans son épitaphe avec l'inscription *Eadem mutata resurgo* (« Même changée je reste »).

Les chaînettes, autre nom des cycloïdes étudiées par Bernoulli, sont les courbes qui s'utilisent aujourd'hui dans les ponts suspendus et les lignes électriques aériennes.

Théorème de Bernoulli (ou loi restreinte des grands nombres)
Dans une série d'épreuves indépendantes, la probabilité que la valeur moyenne F (fréquence relative) s'écarte de sa moyenne M d'une valeur supérieure à k (k positif quelconque aussi petit que l'on veut) tend vers zéro lorsque le nombre d'épreuves tend vers l'infini.

Autrement dit :
Si nous effectuons un grand nombre n d'épreuves, nous pouvons escompter avec une probabilité proche de 1 que le nombre q d'apparitions d'un résultat A sera très voisin de sa valeur la plus probable, et n'en différera que d'une fraction insignifiante du nombre n.

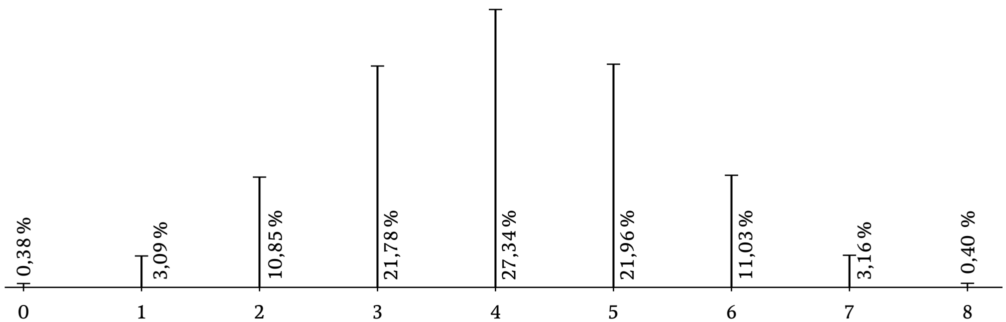
Loi de Bernoulli
Pour la distribution binomiale : on considère une épreuve à 2 issues A et $\bar{A}$ (épreuve binomiale), de probabilités (p) et ($1 - p$), et on la répète n fois ; alors la probabilité que l'issue A apparaisse k fois est :

$$B_A(n\,;k\,;p) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(p)^k(1-p)^{n-k}$$

EXEMPLE Si pour un couple, la probabilité d'engendrer un garçon est de 0,501, alors, dans l'hypothèse où il souhaite avoir 8 enfants la probabilité d'avoir 5 garçons sera :

$$B(8\,;5\,;0{,}501) = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0{,}501)^5(0{,}499)^3 \cong 0{,}2196 = 21{,}96\,\%,$$

et la distribution peut être représentée comme suit :



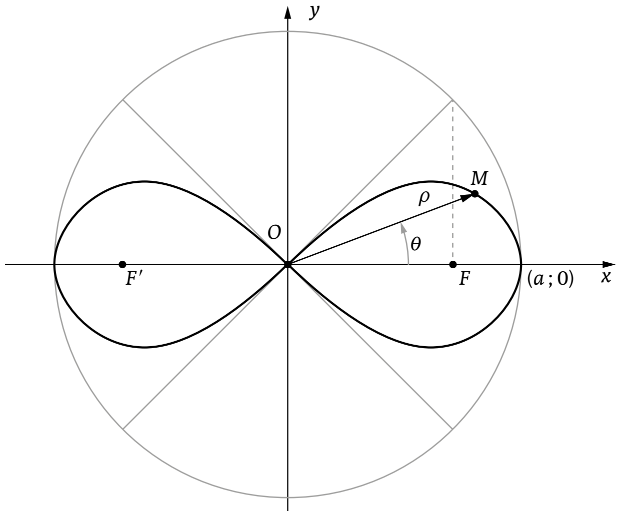
Pour une distribution multinomiale, la formule devient :

$$B(n\,;k_1,k_2\ldots,k_m\,;p_1,p_2\ldots,p_m) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}(p_1)^{k_1}(p_2)^{k_2}\ldots(p_m)^{k_m}$$

avec $\sum_1^m k_i = n$ *et* $\sum_1^m p_i = 1$

Lemniscate de Bernoulli

On donne deux points F et F' et le milieu O de leur segment, alors le point mobile M décrivant la courbe a pour définition
$[MF] \cdot [MF'] = [OF]^2$



NOTA En fait $[OF]^2 = \dfrac{a^2}{2}$

En coordonnées cartésiennes, l'équation de la courbe est :
$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$
En coordonnées polaires, elle devient : $\rho^2 = a^2 \cos(2\theta)$

En coordonnées paramétriques, c'est alors : $\begin{cases} x = a\dfrac{t + t^3}{1 + t^4} \\ y = a\dfrac{t - t^3}{1 + t^4} \end{cases}$

La longueur de la lemniscate est : $\ell = 2\pi a G$, où G est la constante de Gauss.
L'aire délimitée par la lemniscate est : $\mathcal{A} = a^2$

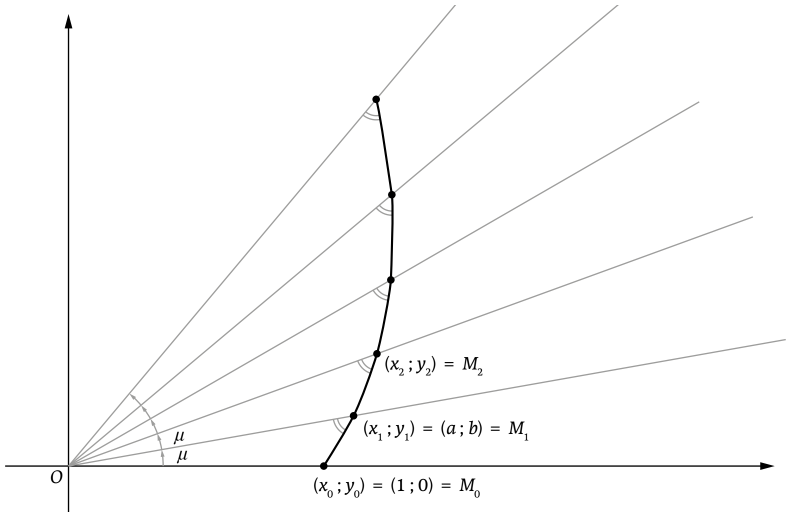
NOTA BENE La lemniscate (λεμνοσ en grec = serpent) aurait donné le signe « infini » de l'analyse, mais d'autres prétendent que le signe est dû à John Wallis (1616-1703).

Équation de Bernoulli

Équation différentielle du type $a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = c(x) \cdot y^n$
Elle se résout comme une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Spirale de Bernoulli ou spirale logarithmique

On considère un triangle quelconque OM_0M_1, tel que l'angle en O mesure μ, puis on construit successivement les triangles OM_1M_2, OM_2M_3, ..., tous semblables au triangle OM_0M_1 ; alors les points M_0, M_1, M_2, M_3, ... sont sur une spirale que l'on finira par obtenir complètement en faisant tendre μ vers 0.



Rapport de similitude :

$$\frac{[OM_1]}{[OM_0]} = \frac{[OM_2]}{[OM_1]} = \ldots = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{1} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{[OM_n]}{[OM_0]} = [OM_n] = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n, \text{notamment } [OM_2] = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x_2 = [OM_2]\cdot\cos(2\mu) = [OM_2]\cdot(\cos^2(\mu)-\sin^2(\mu)) = \ldots = a^2-b^2 \\ y_2 = [OM_2]\cdot\sin(2\mu) = [OM_2]\cdot(2\sin(\mu)\cdot\cos(\mu)) = \ldots = 2ab \end{cases}$$

En écriture matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \ldots$$

..... enfin : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

En se référant au plan complexe, on a donc affaire aux puissances successives d'un nombre $z = a + bi$, d'où l'appellation de spirale logarithmique.

John

Venn

1834-1923

Anglais
Né à Kingston-upon-Hull, East-Yorkshire (Angleterre)
Mort à Cambridge (Angleterre)

John Venn a 3 ans quand sa mère meurt en couches à la naissance de son petit frère. Il est élevé par son père, le révérend Henry Venn, recteur de la paroisse de Drypool. Ce dernier est très engagé dans les missions en Afrique, la réforme des prisons et la lutte contre l'esclavage.

Après avoir eu quelques précepteurs, Venn fréquente la Cholmeley's School de Highgate, puis suit des études de théologie à l'Université de Cambridge. Il est gradué en 1857, diacre en 1858, puis prêtre anglican en 1859. Se débrouillant mal avec les tâches paroissiales, il est nommé lecteur en sciences morales à l'Université de Cambridge en 1862. Il quittera la prêtrise en 1883.

Venn est aussi un ingénieux bricoleur et invente diverses machines, dont une pour lancer des balles de cricket, qui sera très longtemps utilisée par les joueurs pour leur entraînement. Il s'intéresse aussi à la logique et aux probabilités, domaines devenus à la mode, qui conduiront à sa première publication, *The Logic of Chance*, en 1866. Il s'oriente alors vers une carrière de mathématicien et logicien au Gonville and Caius College de Cambridge. Les fameux diagrammes de Venn, inspirés des cercles d'Euler, paraissent en 1881 sous le titre *On The Diagramatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings.*

Marié en 1867 avec Susanna, fille d'un pasteur, il a un fils, John Archibald, qui fera aussi une carrière universitaire au Queens College de Cambridge. Dans ses loisirs, il est un botaniste pointu, un randonneur et un varappeur.

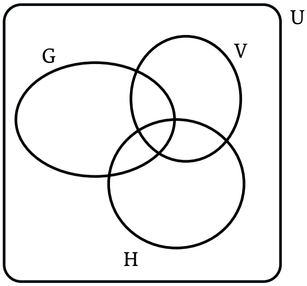
Venn est élu à la Royal Society en 1883. Attaché à son College, très impliqué dans son fonctionnement et son développement, il en retrace l'histoire en plusieurs livres. À sa mort, son fils termine sa rédaction : le dernier volume paraît en 1953.

La direction du Gonville and Caius College décide d'honorer Venn en faisant fabriquer un vitrail représentant l'un de ses diagrammes pour sa salle à manger, vitrail toujours visible aujourd'hui.

Diagrammes de Venn

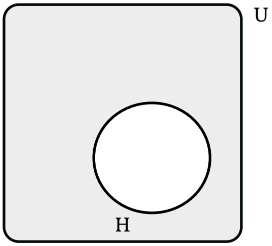
Schémas de courbes fermées, utilisés pour représenter des notions logico-mathématiques, notamment pour les ensembles et les probabilités qui y seraient attachées.

EXEMPLE « Dans la population (U) d'un village, durant le dernier hiver, le médecin répertorie les personnes atteintes de la grippe (G), celles qui s'étaient fait vacciner (V) à l'automne, et distingue les hommes (H) et les femmes. » Cette situation est représentable par le diagramme ci-après.

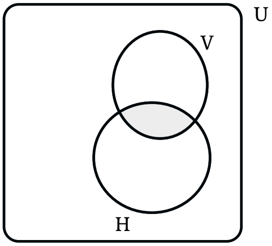


On peut en outre distinguer :

Le complémentaire d'un sous-ensemble
$\overline{H} = C_U(H) = \{\text{ensemble des femmes}\}$



L'intersection de 2 sous-ensembles
$I = H \cap V = \{\text{ensemble des habitants hommes } \underline{\text{et}} \text{ vaccinés}\}$



La réunion de 2 sous-ensembles
$R = H \cup V = \{\text{ensemble des habitants hommes } \underline{\text{ou}} \text{ vaccinés}\}$