

FA349 Parc au mètre

Intentions

- Résoudre un problème en utilisant une équation du second degré.

Eléments d'analyse a priori

Une première stratégie consiste à rester dans le cadre géométrique et à mettre en place la stratégie qui consiste à tâtonner éventuellement avec un logiciel de géométrie dynamique : il s'agit de tracer trois cercles, respectivement centrés en P , Q et R , de façon qu'ils soient tangents, deux à deux. Si, pour les deux premiers, il n'y a aucune difficulté particulière, il n'en va pas de même pour le troisième, dont le rayon est soit trop petit (fig. 1), soit trop grand.

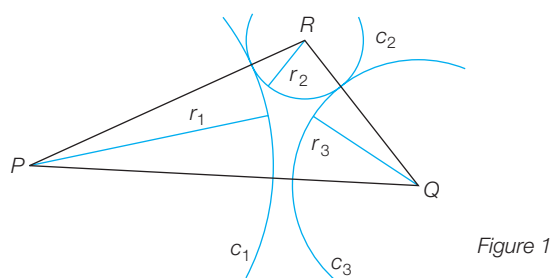


Figure 1

Quelques essais, au cours desquels les élèves réduisent, puis augmentent alternativement la dimension des rayons, suffisent pour parvenir à une solution acceptable dans laquelle les trois cercles sont tangents (fig. 2).

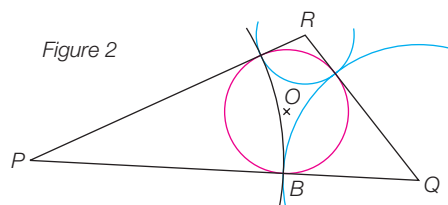


Figure 2

Les points A , B et C sont-ils trois points quelconques ? Cette simple question en amène d'autres, ainsi que quelques constatations :

- le triangle ABC joue-t-il un rôle prépondérant ? Quelles sont ses caractéristiques ? Est-il semblable au triangle PQR ?
- les segments PC , QA et RB sont-ils des médianes ? des médiatrices ? des bissectrices ? des hauteurs ?
- ces trois segments sont concourants, sans avoir pour autant l'une ou l'autre des caractéristiques précédentes.

Finalement, une observation plus fine montre que ces trois points sont les points de tangence du cercle inscrit dans le triangle PQR avec, pour conséquence : $PA = PB$, $QB = QC$ et $RC = RA$. Autrement dit, quel que soit le triangle PQR , il suffit de construire son cercle inscrit pour déterminer les dimensions des trois portes à battants.

On peut envisager une méthode algébrique en appelant x , y et z les longueurs des différentes portes. La longueur minimale des portes s'obtient lorsque la somme de deux longueurs est égale à la longueur entre deux piquets. Cela permet d'obtenir un système de trois équations à trois inconnues. Pour le résoudre, les élèves peuvent procéder par substitution. Mais il est également possible d'additionner membre à membre les trois équations, ce qui permet de calculer la somme des trois longueurs. Il est alors facile d'en déduire les longueurs des différentes portes.