

FA352 Un disque dans tous ses états

Intentions

- Résoudre un problème en mobilisant la **STRATÉGIE** de la démarche scientifique.

Eléments d'analyse a priori

Le décompte effectif du nombre de parties que délimitent les cordes reliant deux à deux dix points d'un cercle est impossible à réaliser. Les élèves doivent essayer d'induire une formule. Pour cela, ils doivent mettre en place la stratégie de la démarche scientifique. Un tableau regroupant les premiers essais induit une première formule : pour n points, on a 2^{n-1} régions.

Nombre de points $n =$	2	3	4	5	
Nombres de parties $P(n) =$	2	4	8	16	

Hélas, pour $n = 6$, on ne trouve pas 32 régions comme le laisserait penser la conjecture trouvée, mais 31 régions. On a beau recompter, c'est bien 31 ! On peut alors essayer $n = 7$ pour savoir si finalement ce ne serait pas qu'un accident de parcours, mais pour $n = 7$, on trouve 57 régions et non 64. On se rend également compte à cette occasion qu'on ne peut guère aller plus loin dans les essais car le dénombrement devient très complexe.

Arrivé à ce stade de la recherche, il y a plusieurs possibilités :

- essayer de trouver une relation reliant le nombre de parties pour n points aux nombres de parties pour $n - 1$ points. Pour cela, on peut compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de points $n =$	2	3	4	5	6	7	
Nombres de parties $P(n) =$	2	4	8	16	31	57	
$P(n + 1) - P(n) =$	X	2	4	8	15	26	

Aucune conjecture n'émerge de ce tableau ;

- on peut alors essayer de trouver une procédure de dénombrements du nombre de régions qu'on établit pour un nombre de points donnés et qui peut ensuite être généralisée. Par exemple, avec six points, on considère qu'on tourne dans le sens trigonométrique sur le cercle et on numérote les points de A1 à A6 ; on considère que chaque point d'intersection est commun à exactement deux cordes (sinon, on bouge un peu un point). On a au départ une région : le disque. Le point A1 joint les 5 autres points en créant 5 cordes et ajoute 5 régions. Ensuite, si on joint deux points consécutifs, on ajoute une région ; et chaque fois que l'on joint deux points en coupant n cordes, on ajoute $n + 1$ régions. Le point A2 joint les 4 points restants. Avec le point le plus proche, cela crée une région, avec le suivant, il coupe une corde et crée 2 régions, puis il coupe 2 cordes et crée 3 régions et enfin, il coupe 3 cordes et crée 4 régions. Le point A3 joint les 3 points restants. Avec le point le plus proche A4, il crée une région. Avec le point A5, il coupe les deux cordes partant de A4 et crée donc 3 régions ; avec le point A6, il coupe les deux cordes issues de A4 et les deux cordes issues de A6, soit 4 cordes et crée donc 5 régions.

SUITE →

Le point A4 joint les points A5 et A6. Avec A5, il crée une région ; avec A6, il coupe les 3 cordes issues de A5 et crée donc 4 régions. Le point A5 joint A6 en créant une région. On a donc au total :

$$1 + 5 + (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 3 + 5) + (1 + 4) + 1 = 31.$$

On retrouve bien le résultat prévu. On peut généraliser à un nombre $n > 6$ (d'après V. Durand-Guerrier, voir site ci-dessous).

Quant à la formule générale, elle semble hors de portée des élèves.

Gestion de la classe

Compte tenu de la difficulté de cette activité, il semble important de mettre en place un **TRAVAIL DE GROUPES** suivi de **MISES EN COMMUN** régulières.

On peut envisager une première mise en commun lorsque certains groupes ont trouvé $2n - 1$ et que les autres sont bloqués. Cela permettra de faire tomber cette conjecture et de se mettre d'accord sur le tableau de valeurs. A cette occasion, on peut insister une fois encore sur la règle du débat scientifique : « Quelques exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver que cet énoncé est vrai ». C'est un enjeu important de cette activité.

L'enseignant peut relancer la recherche en invitant les élèves à trouver une méthode de dénombrement pour 5 points par exemple.

Liens

RESSOURCES DIDACTIQUES

- Travail de groupes, mise en commun (cf. Le travail de groupes et la mise en commun)
- Stratégie de recherche (cf. La résolution de problèmes)

SITE INTERNET

- Présentation détaillée de l'analyse a priori de ce problème → <http://goo.gl/0xzvA>