

## FA373 Le marchand de tapis

### Intentions

- Résoudre un problème en mobilisant la **STRATÉGIE** de l'étude exhaustive des cas.
- Prendre conscience de l'intérêt de l'usage d'un tableur pour renforcer sa conviction relative à la validité d'une conjecture.

### Éléments d'analyse a priori

Pour mettre en place l'étude exhaustive des cas, les élèves peuvent soit rester dans le cadre géométrique soit passer dans le cadre algébrique, soit dans le cadre graphique.

**Cadre géométrique :** Les élèves perçoivent qu'il faut au minimum un carré  $3 \times 3$  pour arriver à avoir des carrés intérieurs. Ils peuvent donc partir de ce carré puis « l'allonger ». En faisant la différence entre le nombre de carrés de bordure et le nombre de carrés intérieurs, on constate que ce nombre augmente de un chaque fois. En effet, chaque fois qu'on augmente la longueur de 1, on rajoute 2 carrés en bordure et un à l'intérieur. Donc on n'obtiendra jamais l'égalité puisqu'avec un carré  $3 \times 3$ , il y a 8 carrés en bordure et un carré intérieur.

On passe ensuite à un carré  $4 \times 4$ . Cette fois, on constate que la différence entre le nombre de carrés en bordure et le nombre de carrés intérieurs est constante. En effet, chaque fois qu'on augmente la longueur de 1 on ajoute 2 carrés en bordure et 2 carrés intérieurs. On n'obtiendra donc jamais l'égalité, puisqu'avec un carré  $4 \times 4$ , il n'y a pas égalité entre le nombre de carrés intérieurs et le nombre de carrés en bordure.

On passe ensuite à un carré  $5 \times 5$ . Cette fois, on constate que la différence entre le nombre de carrés en bordure et le nombre de carrés intérieurs diminue : au début la différence est de  $16 - 9 = 7$ , puis, à l'étape suivante, elle passe à  $18 - 12 = 6$ . En effet, chaque fois qu'on augmente la longueur de 1, on ajoute 2 carrés de bordure et 3 carrés intérieurs, donc la différence entre les nombres diminue de 1. Cette différence finira donc par être nulle, ce qui arrive lorsque la longueur du rectangle est de 12 carrés.

On continue avec les carrés  $6 \times 6$ . En suivant un raisonnement analogue, on trouve un rectangle de 6 par 8.

D'une façon générale, quand on part d'un carré  $m \times m$  et qu'on augmente une dimension d'une unité, on ajoute 2 carrés en bordure et  $m - 2$  carrés intérieurs. Si  $m > 4$ , alors  $m - 2 > 2$ , ce qui signifie que si  $m > 4$ , le nombre de carrés intérieurs augmente plus que le nombre de carrés en bordure.

On constate qu'à partir du carré  $7 \times 7$ , il y a plus de carrés intérieurs que de carrés en bordure, ainsi il ne sera pas possible d'arriver, en augmentant une dimension, d'avoir autant de carrés intérieurs que de carrés en bordure. Pour prouver cette conjecture, il faut prouver que pour  $m > 6$ , le nombre de carrés en bordure qui est égal à  $4m - 4$  est inférieur au nombre de carrés intérieurs qui est égal à  $(m - 2)(m - 2)$ . Les élèves n'ont pas les moyens de le prouver (voir complément mathématique ci-dessous). En revanche, ils peuvent renforcer leur conviction à l'aide d'un tableur.

**Cadre algébrique :** On prend comme unité de longueur le côté d'un carré. On appelle  $m$  et  $n$  les dimensions du rectangle. Le nombre de carrés intérieurs est égal à  $(m - 2) \cdot (n - 2)$ . Il y a plusieurs façons de calculer le nombre de carrés intérieurs. On peut dire traduire l'égalité entre le nombre de carrés intérieurs et le nombre de carrés en bordure par  $(m - 2) \cdot (n - 2) = \frac{mn}{2}$ . On arrive à une équation à deux inconnues à valeurs entières. Pour résoudre cette équation, on peut procéder par essais systématiques en donnant

SUITE →

à  $m$  les valeurs 3, 4, 5, ... et en déterminant chaque fois  $n$ . On ne retient que les valeurs pour lesquelles  $n$  est entier. Pour faciliter les calculs (éventuellement en utilisant un tableur), on peut exprimer  $n$  en fonction de  $m$  :  $n = \frac{4(m-2)}{m-4}$  ( $m$  ne peut être égal à 4).

Comment être sûr qu'au-delà de  $m = 12$ , il n'y a plus de solution ? L'usage d'un tableur, pour effectuer rapidement des calculs pour les valeurs de  $m$  au-delà de 13, permet de renforcer sa conviction, mais ce n'est pas une preuve ! Cette dernière dépasse le niveau des élèves (cf. Compléments mathématiques).

**Cadre graphique :** Même démarrage que ci-dessus, mais ensuite on étudie les points de la courbe représentative de la fonction  $f: x \mapsto \frac{4x-8}{x-4}$  (voir corrigé). Mais cette méthode ne garantit pas qu'il n'y ait pas de solution au-delà de  $x > 12$ .

### Compléments mathématiques

Des essais, éventuellement avec un tableur, permettent de constater qu'à partir de  $m > 6$ , alors  $4m - 4 < (m - 2)(m - 2)$ . Pour cela, on étudie le signe de  $(m - 2)(m - 2) - (4m - 4) = m^2 - 8m + 8$ .

Cette expression est positive pour  $m > \frac{8 + \sqrt{32}}{2}$  (Etude du signe du trinôme du second degré).

Or  $6 < \frac{8 + \sqrt{32}}{2} < 7$ . CQFD.

Le tableur permet de constater que les résultats semblent strictement compris entre 4 et 5. Si on arrive à le prouver, cela permet d'affirmer qu'au-delà de  $m = 12$ , il n'y a plus de solution.

$m - 2 > m - 4 > 0$ , quelle que soit la valeur de  $m > 4$  donc  $4 \frac{m-2}{m-4} > 4$ .

Prouvons que  $4 \frac{m-2}{m-4} < 5$ . Pour cela, on étudie le signe de  $4 \frac{m-2}{m-4} - 5 = \frac{m+12}{m-4}$ , cette expression est négative pour des valeurs de  $m$  strictement supérieures à 12. Donc  $4 \frac{m-2}{m-4} < 5$  à partir de  $m > 12$ . Donc à partir de  $m = 13$ , aucune valeur de  $n = 4 \frac{m-2}{m-4}$  ne sera entière.

### Gestion de la classe

Ce problème est complexe, le début d'étude systématique des cas est long à réaliser, aussi cette activité se prête bien à un **TRAVAIL DE GROUPES**.

Si, après la mise en commun, les élèves sont bloqués, l'enseignant peut les inviter à mettre en place une des démarches présentées ci-dessus. On peut envisager que l'enseignant donne des informations sur les cadres ci-dessus et invite les groupes à choisir un des cadres. L'usage d'un tableur peut aussi être proposé pour augmenter le nombre d'essais et conjecturer le nombre de solutions.

### Liens

#### RESSOURCES DIDACTIQUES

→ Travail de groupes (cf. Le travail de groupes et la mise en commun)