

FA375 Nombres figurés

Intentions

- Résoudre un problème en mettant en place la stratégie de la démarche scientifique et en utilisant le calcul littéral pour prouver la conjecture.

Éléments d'analyse a priori

Question **a)** : Quelques essais permettent aux élèves de conjecturer que la somme de deux nombres triangulaires consécutifs est un carré. Pour prouver cette conjecture, les élèves sont obligés de trouver la formule permettant d'exprimer, en fonction de n , le n ème nombre triangulaire qu'on peut noter T_n .

Pour cela, les élèves peuvent passer dans le cadre numérique : ils peuvent établir un tableau. Les deux premières lignes du tableau ne sont pas forcément suffisantes, d'où l'idée de calculer la différence entre deux nombres consécutifs :

n	1	2	3	4	5	6						
T_n	1	3	6	10	15	21						
$T_{n+1} - T_n$		2	3	4	5	6						

Cela permet de mettre en évidence que $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Les élèves peuvent aussi rester dans le cadre géométrique : en observant la façon dont on passe d'un nombre triangulaire au suivant. Pour passer du 1^{er} nombre au 2^e, on ajoute 2 points, pour passer du 2^e au 3^e, on ajoute 3, ...

La somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ est intervenue dans de nombreuses activités depuis la 9^e, aussi on peut penser que les élèves sont maintenant censés savoir l'exprimer en fonction de n . Si ce n'est pas le cas, l'enseignant peut les inviter à écrire deux fois cette somme, l'une en dessous de l'autre en inversant l'ordre des termes.

Donc $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ par conséquent $T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Il ne reste plus qu'à calculer $T_n + T_{n+1}$.

Question **b)** : ici encore, des essais permettent de constater que le 1^{er} nombre triangulaire est égal au 1^{er} nombre hexagonal, que le 2^e nombre triangulaire n'est égal à aucun nombre hexagonal, le 3^e nombre triangulaire est égal au 2^e nombre hexagonal. Il peut être important de noter ces égalités avec la notation indicielle en notant H_n le n ème nombre hexagonal : $H_1 = T_1$, $H_2 = T_3$; $H_3 = T_5$; $H_4 = T_7$. A ce stade, les élèves perçoivent bien l'évolution du processus et peuvent induire la conjecture $T_n = H_{2n-1}$.

Une fois cette formule conjecturée, il faut arriver à exprimer H_n en fonction de n pour la prouver. Pour cela, il faut établir un tableau de valeurs. Les élèves peuvent constater que chaque fois, n est un diviseur de H_n et que les quotients sont les nombres impairs consécutifs.

N	1	2	3	4	5	6
H_n	1	6	15	28	45	66
	$1 \cdot 1$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 5$	$4 \cdot 7$	$5 \cdot 9$	$6 \cdot 11$

La formule peut être induite (à défaut d'être prouvée) : $H_n = n(2n - 1)$.

Cela permet de prouver que $H_n = T_{2n-1}$.

SUITE →

Gestion de la classe

Cette activité se prête bien à un **TRAVAIL DE GROUPES**.

Question **a)** : si les élèves bloquent, l'enseignant peut d'abord leur conseiller la notation indicielle puis leur demander d'exprimer T_n en fonction de n .

Question **b)** : il est important que toute la classe ait un tableau de valeur de H_n correct. Aussi, on peut envisager une mise en commun pour faire le point sur les valeurs de H_1 à H_7 par exemple.

Liens

RESSOURCES DIDACTIQUES

→ Travail de groupes (cf. Le travail de groupes et la mise en commun)