

Définition 1 Une homothétie est une transformation qui consiste à agrandir ou réduire une figure tout en conservant les directions.

Définition 2 Etant donné un point O et un nombre k non nul, on appelle **homothétie de centre O et de rapport k** la transformation qui, à tout point M , associe un point M' tel que :

- le point O est un point fixe ;
- les points O , M et M' sont alignés.
- Si $k > 0$, les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ ont le même sens et $OM' = k \cdot OM$;
- si $k < 0$, les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ sont de sens contraire et $OM' = -k \cdot OM$.

Notation

Du français...

« La figure f a pour image la figure f' par homothétie de centre O et de rapport k . »

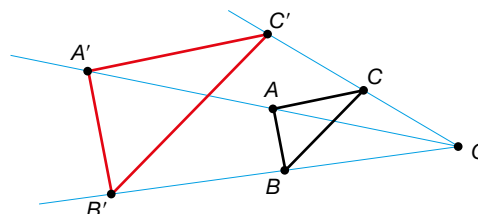
... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{\mathcal{H}(O; k)} f'$$

Exemples

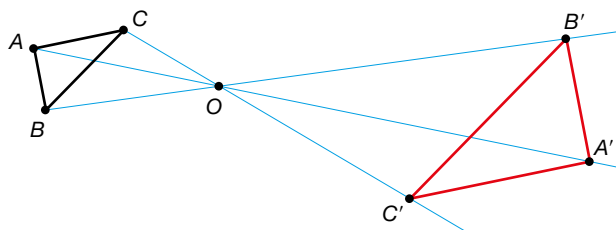
○ $\mathcal{H}(O; 2)$

Les vecteurs \overrightarrow{OA} et $\overrightarrow{OA'}$ sont de même sens et $OA' = 2 \cdot OA$.



○ $\mathcal{H}(O; -2)$

Les vecteurs \overrightarrow{OA} et $\overrightarrow{OA'}$ sont de sens contraire et $OA' = -2 \cdot OA$.



Propriété

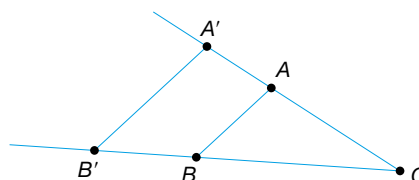
Si un segment AB a pour image un segment $A'B'$ par une homothétie de centre C et de rapport k , alors $\frac{A'B'}{AB} = k$ si $k > 0$ ou $\frac{A'B'}{AB} = -k$ si $k < 0$.

Exemple

$A'B'$ est l'image de AB par une homothétie de centre C et de rapport 1,5.

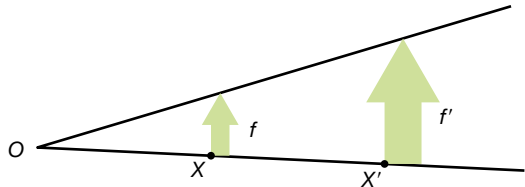
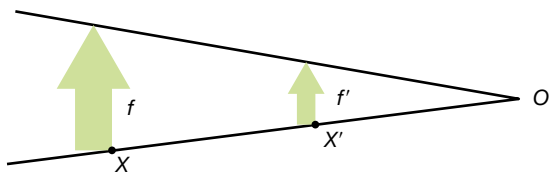
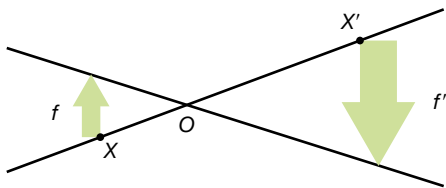
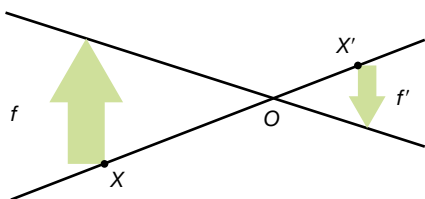
$$\begin{array}{ll} CA = 3 & CB = 4 \\ CA' = 4,5 & CB' = 6 \end{array}$$

$$\text{Donc: } \frac{A'B'}{AB} = 1,5.$$



Conséquence Pour retrouver le rapport d'une homothétie sans connaître son centre, on peut calculer le rapport des longueurs des segments image l'un de l'autre par l'homothétie.

On distingue quatre types d'homothéties.

Nom	Propriétés	Caractéristiques
■ L'agrandissement direct	Il conserve : <ul style="list-style-type: none"> le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; l'orientation ; la direction et le sens des vecteurs. 	<ul style="list-style-type: none"> La figure image est plus grande que celle de départ ; $k > 1$; la figure et son image sont du même côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = 2$.</i>		
		
■ La réduction directe	Il conserve : <ul style="list-style-type: none"> le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; l'orientation ; la direction et le sens des vecteurs. 	<ul style="list-style-type: none"> La figure image est plus petite que celle de départ ; $0 < k < 1$; la figure et son image sont du même côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = \frac{1}{2} = 0,5$.</i>		
		
■ L'agrandissement indirect	Il conserve : <ul style="list-style-type: none"> le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; l'orientation ; la direction mais inverse le sens des vecteurs. 	<ul style="list-style-type: none"> La figure image est plus grande que celle de départ ; $k < -1$; la figure image est de l'autre côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = -2$.</i>		
		
■ La réduction indirecte	Il conserve : <ul style="list-style-type: none"> le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; l'orientation ; la direction mais inverse le sens des vecteurs. 	<ul style="list-style-type: none"> La figure image est plus petite que celle de départ ; $-1 < k < 0$; la figure image est de l'autre côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = -\frac{1}{2} = -0,5$.</i>		
		

ETYM Homothétie : du grec *homos*, semblable et *thetos*, position.

→ Figures semblables (p. 122), Vecteur (p. 128)