

ES117 Ouvrir l'œil, et le bon...

Intentions

- Modéliser une situation en identifiant la nature d'un quadrilatère dans l'espace.

Enjeu de l'activité

Cette activité aide les élèves à percevoir les différences entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace du point de vue des trois géométries : géométrie perceptive, instrumentée et déductive (cf. Commentaires *Figures géométriques planes*).

Eléments d'analyse a priori

Comme dans la géométrie plane, l'élève peut se référer à plusieurs géométries pour effectuer la reconnaissance d'un quadrilatère :

- la géométrie perspective ;
- la géométrie instrumentée ;
- la géométrie déductive.

Mais les deux premières géométries soulèvent des difficultés spécifiques dans l'espace de dimension 3 lorsqu'on travaille avec des représentations en perspective. En effet, les représentations des objets de cet espace sont assez éloignées des objets représentés, en particulier parce qu'il n'y a ni conservation des angles droits, ni conservation de l'isométrie des segments. Par exemple, dans cette activité, en se plaçant dans la géométrie perceptive ou instrumentée, l'élève ne peut pas percevoir que le quadrilatère est un parallélogramme (car la représentation utilisée ne conserve pas le parallélisme) ; de même, il ne peut pas percevoir que le quadrilatère est un losange. Mais ces deux géométries présentent un autre inconvénient : elles ne permettent pas d'être sûr que les quatre points qui définissent le quadrilatère sont bien coplanaires. Cette question, évidemment, ne se posait pas dans la géométrie plane.

Par contre, si l'élève dispose des solides (et non d'une de ses représentations), il peut faire appel à la géométrie perceptive ou instrumentée. A priori, ce n'est pas le cas pour cette activité (sauf bien sûr si l'enseignant dispose par exemple d'un « squelette » des deux cubes, cf. ci-dessous), aussi l'élève doit nécessairement se placer dans la géométrie déductive et pour cela faire appel à des propriétés.

Certaines de ces propriétés sont les propriétés de géométrie plane qui sont utilisables dès qu'on se place dans un plan. Par exemple, une fois qu'on a prouvé que les quatre sommets du quadrilatère $ABCD$ sont dans un même plan et que ses côtés sont isométriques, on peut affirmer que c'est un losange. D'autres propriétés de géométrie plane s'étendent à la géométrie dans l'espace ; par exemple, si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles. Mais il y a également des propriétés ou définitions spécifiques de la géométrie de l'espace de dimension 3. Par exemple, dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas forcément parallèles, à moins d'être dans le même plan. Il y a également des propriétés spécifiques aux points coplanaires : trois points non alignés définissent un plan (axiome), si deux points A et B appartiennent à un plan π alors tous les points de la droite AB sont dans ce plan (axiome). Ainsi un plan est défini par trois points non alignés ou deux droites sécantes ou une droite et un point.

Les élèves n'ont pas encore travaillé avec ces propriétés, cette activité est l'occasion de les aborder.

SUITE →

Gestion de la classe

Après un temps de recherche individuelle, on peut mettre en commun les réponses des élèves et leurs justifications. Les élèves ne perçoivent pas toujours que le quadrilatère est un losange et ils ne pensent pas à s'interroger sur la coplanarité des points A , B , C et D .

Pour aborder la coplanarité des points, il peut être utile d'aborder la notion de plan en partant de l'image mentale apportée par une plaque fine. Voici quelques questions possibles pour cela :

- *Combien y a-t-il de plans passant par deux points de l'espace ?*
- *Si un plan passe par deux points A et B , est-ce que tous les points de la droite AB sont dans ce plan ?*
- *Combien y a-t-il de plans passant par une droite de l'espace ?*
- *Combien y a-t-il de plans passant par trois points de l'espace ?*
- *Combien y a-t-il de plans passant par deux droites sécantes ?*
- *Est-il toujours possible de faire passer un plan par quatre points ?*

Les réponses s'appuient uniquement sur la mobilisation d'images mentales. Pour prouver la coplanarité des points A , B , C et D , on peut soit s'appuyer sur le fait que les droites AC et BD sont sécantes (ce qui n'est pas élémentaire), soit utiliser le parallélisme des droites AB et CD , mais cela suppose de définir ce qu'on appelle des droites parallèles dans l'espace.

Il peut être intéressant de disposer d'un « squelette » des deux cubes de façon à aider les élèves à prendre conscience que quatre points ne sont pas toujours coplanaires, de vérifier expérimentalement (ce qui n'est pas une preuve en mathématiques) que les droites AC et BD sont sécantes, que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.