

## GM178 Avec du papier A4

### Intentions

- Calculer l'aire d'un pentagone.

### Enjeu de l'activité

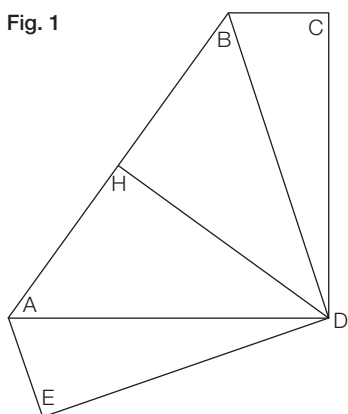
Voici une activité très riche qui permet de réinvestir de nombreux savoirs et savoir-faire :

- les propriétés de la symétrie orthogonale ;
- le calcul d'aires de surfaces ;
- le théorème de Pythagore ;
- la mise en équation et la résolution d'un système non linéaire de deux équations à deux inconnues ;
- les cas d'isométrie des triangles.

### Eléments d'analyse a priori

Le pentagone n'est évidemment pas un pentagone régulier, donc pour calculer son aire, les élèves doivent procéder par addition ou soustraction. Il faut par conséquent décomposer le pentagone en la réunion ou en le complémentaire de figures usuelles.

Fig. 1

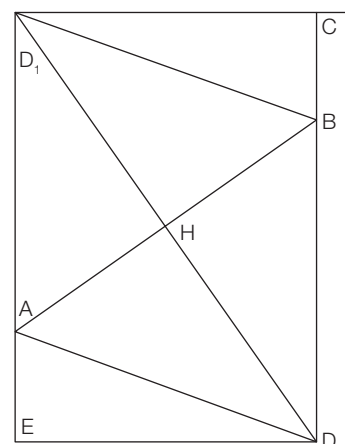


On perçoit sans difficulté que ce pentagone est composé de deux triangles rectangles  $AED$  et  $BDC$  qui semblent superposables et d'un triangle  $ABD$  qui semble isocèle (voir figure ci-contre).

Pour calculer les aires des triangles  $AED$  et  $BDC$ , il faut calculer les longueurs des côtés de leur angle droit. On connaît un côté qui mesure 21 cm ; en revanche, on ne connaît pas l'autre. Le calcul de l'aire du triangle  $ABD$  semble plus complexe ; on peut utiliser le fait (qu'il faut prouver) que c'est un triangle isocèle de hauteur  $DH$ . Mais on ne connaît ni la longueur de  $DH$  ni celle de  $AB$ .

Ne perdons pas de vue que l'on part d'une feuille A4 (donc de dimensions 21 cm x 29,7 cm). Si on déplie la feuille, on peut constater que sa surface est la réunion de deux triangles qui semblent isométriques  $ABD_1$  et  $ABD$  (voir figure 2) et de deux triangles rectangles qui semblent isométriques  $AED$  et  $BCD_1$ . Donc la somme des aires du triangle  $ABD$  et  $AED$  est égale à la moitié de l'aire de la feuille A4. **Par conséquent, l'aire du pentagone est égale à la somme de la moitié de l'aire de la feuille A4 et de l'aire du triangle rectangle  $BCD$ .** Ce raisonnement suppose que l'on prouve que les triangles  $ABD$  et  $ABD_1$  d'une part, et les triangles  $BCD$  et  $AED$  d'autre part, sont isométriques.

Fig. 2



SUITE →

Rappelons-nous que l'on obtient le pentagone par pliage de la feuille de façon à faire coïncider  $D$  et  $D_1$ . Donc  $D$  est le symétrique de  $D_1$  par rapport à la droite  $AB$ . Soit  $S_{AB}$  la symétrie orthogonale d'axe  $AB$ , on a :  $S_{AB}(D) = D_1$ ,  $S_{AB}(A) = A$  et  $S_{AB}(B) = B$ , donc  $S_{AB}(ABD) = ABD_1$ . Cela prouve que les triangles  $ABD$  et  $ABD_1$  sont bien isométriques, mais cela prouve également que  $D_1B = DB = AD$ , donc que les triangles  $AED$  et  $D_1BC$  sont isométriques.

Reste à calculer l'aire du triangle  $DBC$  (fig. 1) : on connaît la longueur de  $DC = 21$  cm, il faut calculer la longueur du segment  $BC$  (cf. 1<sup>re</sup> figure ci-dessus). Appelons  $x$  cette longueur. On n'arrive pas à trouver une équation d'inconnue  $x$ . Introduisons une seconde inconnue  $y$  qui est la longueur de  $BD$ . Il faut alors que l'on trouve deux équations d'inconnues  $x$  et  $y$ .

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle  $BDC$  (fig. 1) en fournit une :  $x^2 + 21^2 = y^2$  et si on redéploie la feuille, on constate que  $x + y = 29,7$ . Cela permet de calculer  $x$ , donc de calculer l'aire du triangle rectangle  $BCD$  et donc l'aire du pentagone.

Ces éléments d'analyse a priori montrent que les élèves peuvent rencontrer trois principales difficultés :

- difficulté 1 : penser à traduire la donnée « *on plie la feuille A4 de manière à superposer deux sommets qui appartiennent à la même diagonale* » à l'aide d'une symétrie orthogonale, si l'on souhaite que les élèves prouvent que les triangles  $ABD$  et  $ABD_1$ , d'une part, et les triangles  $BCD$  et  $AED$ , d'autre part, sont isométriques. En fin de 11<sup>e</sup> année, il est peut-être utile d'exiger ces preuves, en particulier pour les élèves les plus rapides ;
- difficulté 2 : arriver à percevoir que l'aire du pentagone, c'est la moitié de l'aire de la feuille A4 à laquelle on rajoute l'aire du triangle  $ABC$  ;
- difficulté 3 : penser à introduire une inconnue supplémentaire, dont on n'a pas besoin de calculer la valeur, pour calculer  $BC$ .

### Gestion de la classe

Compte tenu des difficultés de cette activité, on peut proposer aux élèves de chercher ce problème en sous-groupes. On peut également scinder la recherche en différentes étapes ponctuées de mises en commun intermédiaires :

1<sup>er</sup> temps : recherche individuelle au cours de laquelle on s'assure que tout le monde réalise convenablement le pentagone et début du travail de groupe ;

2<sup>e</sup> temps : mise en commun pour faire le point sur les idées que chacun a eues et mise en place des étapes de résolution.

Suivent ensuite des temps de recherche pour avancer sur chacune de ces étapes.

Quelques questions possibles pour débloquer les élèves en fonction des difficultés rencontrées :

- difficulté 1 (on reprend la numérotation des éléments d'analyse a priori ci-dessus) : Comment peut-on traduire mathématiquement la donnée : « *on plie la feuille A4 de manière à superposer deux sommets qui appartiennent à la même diagonale* » ?
- difficulté 2 : quel lien y a-t-il entre l'aire du pentagone et l'aire de la feuille A4 ?
- difficulté 3 : essayer d'introduire une seconde inconnue.