

RS20 La prison

Intentions

- Résoudre un problème en mobilisant la stratégie «Tâtonnement réfléchi».

Eléments d'analyse a priori

En appliquant la stratégie «Tâtonnement au hasard», on n'a pratiquement aucune chance d'aboutir. Il faut donc mettre en évidence des propriétés sur la répartition de ces nombres de façon à réduire les possibilités.

Il faut tout d'abord répondre à la question : «Combien peut-il y avoir de prisonniers dans chacune des prisons?». Il y a 9 cases, et au total, il y a 45 prisonniers. Deux cellules distinctes ne peuvent contenir le même nombre de prisonniers. Au minimum, il peut donc y avoir $1 + 2 + 3 + \dots + 9$ prisonniers, or cette somme est égale à 45, cela permet de conclure quant aux nombres de prisonniers possibles dans chaque prison : il faut donc répartir les nombres de 1 à 9 dans les prisons.

On peut retenir une seconde propriété concernant cette répartition en constatant que chaque gardien surveille 17 prisonniers, ce qui fait un total de $4 \cdot 17 = 68$ prisonniers surveillés. On peut en déduire que 23 prisonniers sont surveillés par deux gardiens. Les trois cellules situées aux trois sommets du grand triangle ne sont gardées que par un seul gardien et comptent $45 - 23 = 22$ prisonniers. Une étude systématique des cas permet de prouver qu'il y a seulement deux possibilités pour obtenir 22 en additionnant trois des nombres 1, 2, ..., 9 :

$$9 + 8 + 5 = 22 \text{ et } 9 + 7 + 6 = 22.$$

Les trois cellules des sommets du petit triangle «interne» contiennent au total 17 prisonniers (c'est une donnée) ; en conséquence, les trois cellules placées sur les côtés du grand triangle contiennent au total $23 - 17 = 6$ prisonniers. Une seule possibilité de répartition : $1 + 2 + 3$. Il n'y a plus qu'à placer les derniers nombres.

Gestion de la classe

Les éléments d'analyse a priori ci-dessus permettent de mettre en évidence que les deux questions ci-dessous peuvent être une aide pour les élèves bloqués :

- Combien peut-il y avoir de prisonniers dans chacune des cellules ?
- Combien de prisonniers sont surveillés par deux gardiens, par un seul gardien ?